Inhaltsverzeichnis des Bandes 140.

	Seite
Dávid, L. v., Reihenentwicklungen und Konvergenzuntersuchungen betreffend die *Schapira*sche Iteration	277—296
Fischer, E., Über algebraische Modulsysteme und lineare homogene partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	48— 81
Furtwängler, Ph., Über die Klassenzahlen der Kreisteilungskörper . . .	29— 32
Gravé, D., Démonstration d'un théorème de *Tchébychef* généralisé	247—251
Gundelfinger, S., Über ein algebraisches Theorem	83— 88
Hilb, E., Über Reihenentwicklungen, welche aus speziellen Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichungen entspringen	205—229
Horn, J., *Volterra*sche Integralgleichungen und Summengleichungen. Erster Teil: Zur Theorie der Singularitäten *Volterra*scher Integralgleichungen	120—158
— — *Volterra*sche Integralgleichungen und Summengleichungen. Zweiter Teil: Über die Lösungen gewisser Summengleichungen und ihr asymptotisches Verhalten	159—174
Jacobsthal, E., Zur Theorie der Funktionale	266—276
Kober, H., Beiträge zur Behandlung spezieller Variationsprobleme; Untersuchung konjugierter kinetischer Brennpunkte	235—246
Kokott, P., Elementar-geometrische Ableitung der Additionstheoreme der elliptischen Funktionen	230—234
Lichtenstein, L., Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken	100—119
Neuendorff, R., Über die Kurven auf einer Fläche, deren sphärische Bilder größte Kreise sind	175—204
Riesz, M., Über einen Satz des Herrn *Fatou*	89— 99
Schrutka L., v., Ein Beweis für die Zerlegbarkeit der Primzahlen von der Form $6n+1$ in ein einfaches und ein dreifaches Quadrat . .	252—265
Schur, J., Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen	1— 28
Sturm, R., Zur *Jacobi*schen Erzeugung der Flächen 2. Grades	33— 47
Einladung zum V. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Cambridge, 1912	297
Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1913	298
Inhaltsverzeichnis der Bände 131—140	299—308

241279

Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen.

Von Herrn *J. Schur* in Berlin.

In der vorliegenden Arbeit will ich eine Reihe von Einzelfragen behandeln, die sich auf die von Herrn *Hilbert**) begründete Theorie der beschränkten Bilinearformen beziehen.

Nach Zusammenstellung einiger der bis jetzt bekannten Resultate (§ 1) leite ich in §§ 2 und 3 mehrere neue (hinreichende) Kriterien für die Beschränktheit einer vorgelegten Bilinearform ab. Die Kriterien des § 2 beziehen sich vornehmlich auf absolut beschränkte, die des § 3 auf nicht absolut beschränkte Bilinearformen. Den Inhalt des § 4 bildet der Beweis eines elementaren Satzes über definite *Hermite*sche Formen und eines analogen Satzes über definite *Hermite*sche Kerne. In § 5 teile ich einen neuen einfachen Beweis für die Beschränktheit der zuerst von Herrn *Hilbert* eingeführten Bilinearformen

$$A = \sum_{\substack{p,q=1 \\ (p \neq q)}}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p-q}, \quad S = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p+q}$$

mit und betrachte einige mit ihnen nahe verwandte Formen. In § 6 gebe ich ein sehr einfaches Beispiel für eine reelle quadratische Form an, die beschränkt, aber nicht absolut beschränkt ist. Als Anwendung ergibt sich

*) „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen“, Vierte Mitteilung, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl. 1906, S. 157—227. — Vgl. auch *E. Hellinger*, „Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen“, dieses Journal, Bd. 136 (1909), S. 210—271, und *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*, „Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen“, Math. Annalen, Bd. 69, S. 289—330.

ein durchaus elementarer Beweis für die in den neueren Untersuchungen über *Fourier*sche Reihen mehrfach benutzte Tatsache, daß der Ausdruck

$$\left|\frac{\sin t}{1}+\frac{\sin 2t}{2}+\cdots+\frac{\sin nt}{n}\right|$$

für alle n und alle reellen t unterhalb einer festen Schranke liegt.

Im Schlußparagraphen leite ich mit Hilfe einer Integralformel eine allgemeine Klasse von beschränkten Bilinearformen mit reellen, nicht negativen Koeffizienten ab, in der die vorhin erwähnte Form S als ganz spezieller Fall enthalten ist. Ich erhalte zugleich ein System von unendlich vielen beschränkten Bilinearformen, die dadurch bemerkenswert sind, daß sich ihre oberen Grenzen genau angeben lassen. Insbesondere ergibt sich, daß die obere Grenze der Form S genau gleich π ist.

Ich bediene mich im folgenden der Bezeichungen, die *E. Hellinger* und *O. Toeplitz* in ihrer oben zitierten Arbeit eingeführt haben.

§ 1.

Es sollen hier einige bekannte Definitionen und Resultate zusammengestellt werden, von denen in der Folge Gebrauch gemacht wird*).

Die Bilinearform

$$(1.)\qquad A=A(x,y)=\sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}x_p y_q \text{**}),$$

deren Koeffizienten a_{pq} reelle oder komplexe Zahlen sein können, wird als *beschränkt* bezeichnet, wenn sich eine positive Zahl M angeben läßt, so daß für alle n und für alle reellen oder komplexen Zahlen $x_1, \ldots x_n$, $y_1, \ldots y_n$, die den Bedingungen

$$(2.)\qquad |x_1|^2+\cdots+|x_n|^2\leqq 1,\quad |y_1|^2+\cdots+|y_n|^2\leqq 1$$

genügen, der absolute Betrag des „n-ten Abschnittes“

$$A_n=A_n(x,y)=\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}x_p y_q$$

von A nicht größer als M, also

$$(3.)\qquad \left|\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}x_p y_q\right|\leqq M$$

---

*) Vgl. insbesondere die Arbeit von *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*.

**) Solange über die Konvergenz dieser Doppelreihe nichts bekannt ist, soll das Summenzeichen nur zur Zusammenfassung des Koeffizientensystems (a_{pq}) dienen.

wird. Oder anders ausgedrückt: Ist μ_n das Maximum des absoluten Betrages von $|A_n(x, y)|$ unter den Nebenbedingungen (2.), so soll die obere Grenze μ der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ endlich sein.

Die Zahl μ_n läßt sich folgendermaßen berechnen: Man bezeichne allgemein die zu einer Zahl u konjugiert komplexe Größe mit $\bar{u}$ und setze

$$h_{pq} = \bar{h}_{qp} = a_{1p}\bar{a}_{1q} + a_{2p}\bar{a}_{2q} + \cdots + a_{np}\bar{a}_{nq}.$$

Dann ist μ_n gleich der Quadratwurzel aus der größten unter den (sämtlich reellen, nicht negativen) Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} h_{11}-x, & h_{12}, & \ldots & h_{1n} \\ h_{21}, & h_{22}-x, & \ldots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1}, & h_{n2}, & \ldots & h_{nn}-x \end{vmatrix} = 0.$$

Zugleich ist μ_n^2 das Maximum der definiten *Hermite*schen Form

$$\sum_{p,q=1}^{n} h_{pq} x_p \bar{x}_q = \sum_{r=1}^{n} |a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n|^2$$

unter der Nebenbedingung

$$(4.) \qquad |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leqq 1.$$

Hieraus folgt leicht: Ist $a_{pq} = \bar{a}_{qp}$, so ist die Bilinearform $A(x, y)$ dann und nur dann beschränkt, wenn die *Hermite*sche Form

$$A(x, \bar{x}) = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p \bar{x}_q$$

beschränkt ist, d. h. wenn sich eine Zahl M angeben läßt, so daß für alle n und für alle Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$, die der Bedingung (4.) genügen,

$$|A_n(x, \bar{x})| = \left| \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p \bar{x}_q \right| \leqq M$$

wird.

Ist A beschränkt, so *konvergiert die Reihe* (1.) *im Sinne der Konvergenz der Doppelreihen, sowie auch bei zeilen- und kolonnenweiser Summation für alle Wertsysteme* x_p, y_q, *für welche die Reihen*

$$X = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots, \quad Y = |y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots$$

konvergent sind. Außerdem ist für jede Zahl M, die den Bedingungen (3.) genügt, auch

$$(5.) \qquad \left| \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q \right| \leqq M,$$

sobald $X \leqq 1$, $Y \leqq 1$ wird, und daher für beliebige Werte von X und Y

$$\left| \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q \right| \leqq M\sqrt{XY} \leqq \frac{M}{2}(X+Y).$$

Umgekehrt folgen aus der Ungleichung (5.) auch die Ungleichungen (3.). Jede Zahl M, die diese Eigenschaft besitzt, heißt eine *obere Schranke* der Form A; die kleinste unter diesen Zahlen nennt man die *obere Grenze* von A. Man kann diese Zahl auch als die obere Grenze der früher betrachteten Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ definieren.

Die Konvergenz der Doppelreihe (1.) *für alle Wertsysteme* x_p, y_q, *für welche die Reihen* X, Y *konvergent sind, ist nicht nur eine notwendige, sondern auch hinreichende Bedingung für die Beschränktheit der Form* A. *Dasselbe gilt für die Reihen*

$$\sum_{p=1}^{\infty}\Big(\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q\Big), \text{ bzw. } \sum_{q=1}^{\infty}\Big(\sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q\Big).^{*})$$

Für jede obere Schranke M von A wird

$$(6.) \qquad \sum_{r=1}^{n} |a_{pr}|^2 \leqq M^2, \quad \sum_{r=1}^{n} |a_{rq}|^2 \leqq M^2.$$

Eine notwendige Bedingung für die Beschränktheit der Form A *ist daher, daß die Reihen*

$$|a_{p1}|^2 + |a_{p2}|^2 + \cdots, \quad |a_{1q}|^2 + |a_{2q}|^2 + \cdots \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

konvergieren und daß ihre Summen unterhalb einer endlichen Grenze liegen. Eine hinreichende Bedingung ist die Konvergenz der Doppelreihe $\sum_{p,q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2$.

Sind

$$A = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q, \quad B = \sum_{p,q=1}^{\infty} b_{pq} x_p y_q$$

zwei nicht notwendig beschränkte Bilinearformen, für welche die Reihen

$$\sum_{r=1}^{\infty} |a_{pr}|^2, \quad \sum_{r=1}^{\infty} |b_{rq}|^2 \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

konvergent sind, so konvergieren auch die Reihen

$$f_{pq} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{pr} b_{rq}.$$

Die mit Hilfe dieser Zahlen gebildete Bilinearform

$$F = \sum_{p,q=1}^{\infty} f_{pq} x_p y_q$$

heißt dann die aus A und B durch *Komposition* oder *Faltung* hervorgehende Form und wird mit AB bezeichnet. Sind insbesondere A und B

---

*) Während die anderen hier angeführten Resultate sich schon in der *Hilbert*schen Arbeit finden, ist dieser Satz erst von *E. Hellinger* und *O. Toeplitz* (a. a. O. § 10) ausgesprochen und bewiesen worden.

beschränkte Formen, so besitzt auch F diese Eigenschaft. *Die obere Grenze von $F=AB$ ist höchstens gleich dem Produkt der oberen Grenzen der Formen A und B.*

Sind insbesondere für die Form A die Reihen $\sum_r |a_{rq}|^2$ sämtlich konvergent, so konvergieren auch die Reihen

$$c_{pq} = \bar{c}_{qp} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{rp}\,\bar{a}_{rq}. \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

Die *Hermite*sche Form

$$C = \sum_{p,q=1}^{\infty} c_{pq}\,x_p\,\bar{x}_q, \tag{7.}$$

die durch Faltung der beiden Formen

$$A' = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{qp}\,x_p\,y_q, \quad \bar{A} = \sum_{p,q=1}^{\infty} \bar{a}_{pq}\,x_p\,y_q$$

entsteht, nenne ich *die Norm* $N(A)$ von A*). Von einer Bilinearform A, für welche die Reihen $\sum_r |a_{rq}|^2$ konvergieren, sage ich auch, *A sei eine Form, deren Norm existiert.* Jede beschränkte Form besitzt diese Eigenschaft. Für jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$ mit konvergenter Summe $\sum_p |x_p|^2$ ist dann auch die Reihe (7.) konvergent, und es wird zugleich

$$C = N(A) = \sum_{p=1}^{\infty} \left| \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\,x_q \right|^2.$$

Von besonderer Wichtigkeit für das Folgende ist der (übrigens sehr leicht zu beweisende) Satz (vgl. *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*, a. a. O., S. 304):

Hilfssatz I. *Die Bilinearform A ist dann und nur dann beschränkt, wenn die Norm von A existiert und beschränkt ist. Die obere Grenze von $N(A)$ ist genau gleich dem Quadrat der oberen Grenze von A.*

Da jeder Abschnitt der Form $N(A)$ eine nicht negativ definite *Hermite*sche Form (in endlich vielen Variabeln) ist, so erkennt man leicht auch die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Hilfssatz II. *Sind $A, B, \ldots$ endlich viele Bilinearformen, deren Normen existieren, und ist die Hermitesche Form*

$$H = N(A) + N(B) + \cdots$$

---

*) Hat man, was vielfach der Fall ist, neben der Norm von A noch die Norm von A' zu betrachten, so kann man passend $N(A)$ als die *Zeilennorm* und $N(A')$ als die *Kolonnennorm* von A bezeichnen.

beschränkt, so ist auch jede der Formen $A, B, \ldots$ beschränkt. Ist η die obere Grenze von H, so ist die obere Grenze jeder der Formen $A, B, \ldots$ höchstens gleich $\sqrt{\eta}$.

Es sei noch bemerkt, daß, wenn die Koeffizienten a_{pq} der beschränkten Form A reell sind, auch die Variabeln x_p, y_q als reell angenommen werden dürfen, ohne daß sich hierbei der Wert der oberen Grenze von A ändert. An Stelle der *Hermite*schen Form $N(A)=C(x, \bar{x})$ kann dann die quadratische Form $C(x, x)$ gesetzt werden.

§ 2.

Die Bilinearform

$$A = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q$$

ist jedenfalls beschränkt, wenn die Form

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} |a_{pq}| x_p y_q$$

beschränkt ist. In diesem Fall sagt man, A sei *absolut beschränkt.*

Ich will nun beweisen:

I. *Sind in einer Bilinearform A die Reihen*

$$z_p = \sum_{r=1}^{\infty} |a_{pr}|, \quad k_q = \sum_{r=1}^{\infty} |a_{rq}| \qquad (p, q=1, 2, \ldots)$$

sämtlich konvergent und unterhalb einer endlichen Schranke gelegen, so ist A absolut beschränkt. Ist $z_p \leqq \zeta$, $k_q \leqq \varkappa$, so ist die obere Grenze von A höchstens gleich $\sqrt{\zeta\varkappa}$.

Da hier nur die absoluten Beträge der Zahlen a_{pq} eine Rolle spielen, so können wir annehmen, daß alle a_{pq} reell und nicht negativ sind. Aus der Konvergenz der Reihen k_q folgt insbesondere, daß auch die Reihen $\sum_r a_{rq}^2$ konvergieren; wir können daher die Norm

$$C = N(A) = \sum_{p,q} c_{pq} x_p x_q$$

bilden. Nun wird hier

$$c_{pq} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{rp} a_{rq} \quad \text{und}$$

$$c_p = \sum_{q=1}^{\infty} c_{pq} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{rp} \sum_{q=1}^{\infty} a_{rq} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{rp} z_r \leqq \zeta \sum_{r=1}^{\infty} a_{rp} \leqq \zeta\varkappa.$$

Ist nun ω_n das Maximum von

$$C_n = \sum_{p,q=1}^{n} c_{pq} x_p x_q$$

unter der Nebenbedingung (4.) des § 1, so wird ω_n gleich der größten Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_{11}-x, & c_{12}, & \dots & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}-x, & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \dots & c_{nn}-x \end{vmatrix} = 0.$$

Daher lassen sich n reelle Zahlen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bestimmen, die nicht sämtlich Null sind und den Gleichungen

$$\omega_n \xi_p = \sum_{q=1}^{n} c_{pq} \xi_q \qquad (p=1, 2, \dots n)$$

genügen. Ist $|\xi_p|$ insbesondere die größte unter den Zahlen $|\xi_1|, |\xi_2, \dots |\xi_n|$, so wird*)

$$\omega_n |\xi_p| \leqq \sum_{q=1}^{n} c_{pq} |\xi_q| \leqq |\xi_p| \sum_{q=1}^{n} c_{pq} \leqq |\xi_p| \cdot \zeta\varkappa,$$

also $\omega_n \leqq \zeta\varkappa$. Folglich ist $N(A)$ beschränkt und die obere Grenze von $N(A)$ höchstens gleich $\zeta\varkappa$. Hieraus folgt aber auf Grund des Hilfssatzes I der zu beweisende Satz.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß die Form A *nicht beschränkt zu sein braucht, wenn sie nur die Eigenschaft besitzt, daß die Reihen*

$$\sum_{r=1}^{\infty} |a_{pr}|^{1+\varrho}, \quad \sum_{r=1}^{\infty} |a_{rq}|^{1+\varrho}$$

für jedes positive ϱ konvergent sind und unterhalb einer (von ϱ abhängigen) Grenze liegen. Dies erkennt man an dem Beispiel

$$A = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{\log p \log q}{p+q} x_p y_q.$$

Die erwähnte Bedingung ist hier, wie man leicht schließt, erfüllt. Setzt man aber

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_p = y_p = \frac{1}{\sqrt{p} \log p}, \qquad (p \geqq 2)$$

so sind die Reihen $\sum_p x_p^2$, $\sum_p y_p^2$ konvergent, dagegen wird die Doppelreihe

$$\sum_{p,q=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{pq}(p+q)}$$

divergent. Die Form A ist also nicht beschränkt.

Die Gesamtheit $\mathfrak{A}$ der Bilinearformen, die den Bedingungen des Satzes I genügen, besitzt offenbar die Eigenschaft, daß die aus zwei Formen

---

*) Vgl. *G. Frobenius*, „Über Matrizen aus positiven Elementen, II.“, Sitzungsberichte der K. Preuß. Akademie, Berlin, 1909, S. 514—518.

von $\mathfrak{A}$ durch Faltung hervorgehende Form wieder in $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Man kann daher $\mathfrak{A}$ als eine Untergruppe in der Gruppe $\mathfrak{B}$ aller beschränkten Formen bezeichnen.

Aus dem Satz I ergibt sich leicht:

II. *Sind*

$$(u_{pq}),\ (v_{pq}) \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

zwei Koeffizientensysteme, für welche die Reihen

$$u_p=\sum_{r=1}^{\infty}|u_{pr}|^2,\ u'_q=\sum_{r=1}^{\infty}|u_{rq}|^2,$$
$$v_p=\sum_{r=1}^{\infty}|v_{pr}|^2,\ v'_q=\sum_{r=1}^{\infty}|v_{rq}|^2, \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

konvergent und sämtlich unterhalb einer endlichen Schranke gelegen sind, so ist die Bilinearform

$$A=\sum_{p,q=1}^{\infty}u_{pq}v_{pq}x_p y_q$$

absolut beschränkt. Ist insbesondere

$$u_p\leqq u,\ u'_q\leqq u,\ v_p\leqq v,\ v'_q\leqq v,$$

so wird die obere Schranke von A höchstens gleich $\sqrt{uv}$.

Auf Grund der bekannten Ungleichung

$$|x_1y_1+x_2y_2+\cdots|^2\leqq[|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots][|y_1|^2+|y_2|^2+\cdots]$$

erhält man nämlich

$$\sum_{r=1}^{\infty}|u_{pr}v_{pr}|\leqq\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty}|u_{pr}|^2\cdot\sum_{r=1}^{\infty}|v_{pr}|^2}\leqq\sqrt{uv}$$

und ebenso

$$\sum_{r=1}^{\infty}|u_{rq}v_{rq}|\leqq\sqrt{uv}.$$

Daher genügt A den Bedingungen des Satzes I, wobei $\zeta=\varkappa=\sqrt{uv}$, also auch $\sqrt{\zeta\varkappa}=\sqrt{uv}$ wird.

Insbesondere ergibt sich auf Grund der Ungleichungen (6.) des § 1:

III. *Sind*

$$A=\sum_{p,q=1}^{\infty}a_{pq}x_p y_q,\ B=\sum_{p,q=1}^{\infty}b_{pq}x_p y_q$$

zwei beschränkte Bilinearformen, so ist die Form

$$P=\sum_{p,q=1}^{\infty}a_{pq}b_{pq}x_p y_q$$

absolut beschränkt. Die obere Grenze von P ist, wenn α und β die oberen Grenzen von A und B bedeuten, höchstens gleich $\alpha\beta$.

Es ist noch zu bemerken, daß der erste Teil unseres Satzes als trivial erscheint, wenn eine der Formen A oder B absolut beschränkt ist. Denn ist z. B. A absolut beschränkt und ist b die obere Grenze der Zahlen $|b_{pq}|$, so ergibt sich für alle Wertsysteme $x_1, \dots x_n$, $y_1, \dots y_n$, die den Bedingungen (2.) des § 1 genügen,

$$\left| \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} b_{pq} x_p y_q \right| \leqq b \sum_{p,q=1}^{n} |a_{pq} x_p y_q| \leqq b\alpha',$$

wenn α' die obere Grenze der Form $\sum_{p,q} |a_{pq}| x_p y_q$ bedeutet. Die in unserem Satz gegebene Abschätzung der oberen Grenze von P kann aber unter Umständen auch in diesem Fall dem wahren Wert näher kommen als die sich auf dem zweiten Wege ergebende. Ist z. B.

$$A = B = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - 2x_2 y_2,$$

so wird $\alpha = \beta = \sqrt{5}$, $b = 2$, $\alpha' = 3$; hier ist also $\alpha\beta < b\alpha'$.

Insbesondere ergibt sich, daß, wenn $A = \sum_{p,q} a_{pq} x_p y_q$ eine beschränkte Bilinearform mit der oberen Grenze α ist, für jedes $\nu > 1$

$$A^{(\nu)} = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}^{\nu} x_p y_q$$

eine absolut beschränkte Form wird, deren obere Grenze höchstens gleich α^ν ist. Ist ferner α_2 die obere Grenze von $A^{(2)}$ und $a \geqq |a_{pq}|$, so wird für $\nu \geqq 2$ die obere Grenze von $A^{(\nu)}$ höchstens gleich $a^{\nu-2}\alpha_2$. Sind daher $c_1, c_2, \dots$ beliebige Zahlen, für welche die Reihe

$$c_1 a + c_2 a^2 + \cdots$$

absolut konvergiert, so wird, wenn $A_n^{(\nu)}$ der n-te Abschnitt der Form $A^{(\nu)}$ ist,

$$|c_1 A_n^{(1)} + c_2 A_n^{(2)} + \cdots| \leqq |c_1|\alpha + \alpha_2(|c_2| + |c_3| a + \cdots).$$

Hieraus folgt:

IV. *Ist*

$$A = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x\ y_q$$

eine beschränkte Bilinearform, in der $|a_{pq}| \leqq a$ *ist, und bedeutet*

$$f(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

eine beliebige Potenzreihe, die für $x = a$ *absolut konvergiert, so ist auch die Form*

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} f(a_{pq}) x_p y_q$$

beschränkt.

Z. B. sind zugleich mit A auch die Bilinearformen

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{a_{pq}}{\xi - a_{pq}} x_p y_q, \quad \sum_{p,q=1}^{\infty} \log\left(\frac{\xi}{\xi - a_{pq}}\right) x_p y_q$$

beschränkt, sobald nur der absolute Betrag von ξ größer ist als die obere Grenze der Zahlen $|a_{pq}|$.

Der Satz IV läßt sich in naheliegender Weise verallgemeinern, indem man an Stelle einer beschränkten Bilinearform A ein System von endlich vielen beschränkten Formen $A, B, C, \ldots$ betrachtet.

§ 3.

Ähnlich wie bei einer analogen Betrachtung in der Theorie der unendlichen Reihen kann man sich die Aufgabe stellen, diejenigen Koeffizientensysteme

$$u_{pq} \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

zu studieren, welche die Eigenschaft besitzen, daß für *jede* beschränkte Bilinearform $\sum_{p,q} a_{pq} x_p y_q$ auch die Form $\sum_{p,q} a_{pq} u_{pq} x_p y_q$ beschränkt ist. Ein solches System u_{pq} will ich im folgenden als *ein Multiplikatorensystem für beschränkte Bilinearformen* bezeichnen.

Sind u_{pq} und v_{pq} zwei Multiplikatorensysteme, so besitzen offenbar auch die Systeme

$$au_{pq}+bv_{pq}, \quad u_{pq}v_{pq}$$

dieselbe Eigenschaft; hierbei können a und b zwei beliebige reelle oder komplexe Zahlen bedeuten. Ferner bilden zugleich mit den Zahlen u_{pq} auch die Zahlen u_{qp} ein Multiplikatorensystem.

Das einfachste Multiplikatorensystem u_{pq} erhält man, indem man, wenn

$$a_1, a_2, \ldots; \quad b_1, b_2, \ldots$$

beliebige Größen sind, deren absolute Beträge unterhalb einer endlichen Schranke liegen, $u_{pq}=a_p b_q$ setzt. Aus dem Satz III folgt ferner, daß die Koeffizienten u_{pq} einer beliebigen beschränkten Bilinearform ein Multiplikatorensystem bilden. Allgemeiner genügt es, daß die Reihen

$$\sum_{r=1}^{\infty} |u_{pr}|^2, \quad \sum_{r=1}^{\infty} |u_{rq}|^2 \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

konvergent und sämtlich unterhalb einer endlichen Schranke gelegen sind (vgl. Satz II).

Auf Grund des auf S. 4 angeführten Satzes von *E. Hellinger* und *O. Toeplitz* erhält man ferner ein Multiplikatorensystem für beschränkte Bilinearformen, indem man ein System u_{pq} betrachtet, welches die Eigenschaft besitzt, daß für *jede* konvergente Doppelreihe $\sum_{p,q} a_{pq}$ auch die Doppel-

reihe $\sum_{p,q} a_{pq} u_{pq}$ konvergiert. Diese Bedingung ist z. B., wie *G. H. Hardy**) gezeigt hat, erfüllt, wenn die Zahlen

$$u_{pq},\ u_{pq}-u_{p+1,q},\ u_{pq}-u_{p,q+1},\ u_{pq}-u_{p+1,q}-u_{p,q+1}+u_{p+1,q+1}$$

reell und nicht negativ sind und

$$\lim_{q=\infty} u_{1q} = \lim_{p=\infty} u_{p1} = 0$$

ist.

Ich möchte hier aber auf zwei ganz andere Klassen von Multiplikatorensystemen aufmerksam machen, die für die Anwendungen von größerer Bedeutung zu sein scheinen.

Ist $h_{pq} = \bar{h}_{qp}$, so bezeichnet man die (formal gebildete) *Hermite*sche Form

$$H = \sum_{p,q=1}^{\infty} h_{pq} x_p \bar{x}_q$$

als *(nichtnegativ) definit*, wenn für jedes n und jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$H_n = \sum_{r,q=1}^{n} h_{pq} x_p \bar{x}_q \geqq 0$$

wird. Es genügt hierzu bekanntlich, daß die (sämtlich reellen) Hauptunterdeterminanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} h_{11}, h_{12}, \ldots h_{1n} \\ h_{21}, h_{22}, \ldots h_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ h_{n1}, h_{n2}, \ldots h_{nn} \end{pmatrix}$$

nicht negative Werte haben. Läßt sich insbesondere eine positive Zahl μ angeben, so daß für alle n

$$H_n \geqq \mu\left[|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2\right]$$

wird, so nennt man H *positiv definit*. In einer definiten *Hermite*schen Form ist die obere Grenze h der (nichtnegativen) Zahlen $h_{11}, h_{22}, \ldots$ zugleich auch die obere Grenze der absoluten Beträge aller Zahlen h_{pq}.

Es gilt nun der Satz:

V. *Die Koeffizienten h_{pq} jeder definiten Hermiteschen Form, für welche die obere Grenze h der Zahlen $h_{11}, h_{22}, \ldots$ endlich ist, bilden ein Multiplikatorensystem für beschränkte Bilinearformen. Ist die obere Grenze der beschränkten Bilinearform*

---

*) Proceedings of the London Mathematical Society, Serie 2, Bd. 1 (1903), S. 124—128, und Bd. 2 (1904), S. 190—191.

$$A = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q$$

gleich α, so ist die obere Grenze der Bilinearform

$$B = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} h_{pq} x_p y_q$$

höchstens gleich αh.

Man bestimme nämlich, was bekanntlich stets möglich ist, n Linearformen

$$z_p = \sum_{q=1}^{n} l_{pq} x_q \qquad (p=1, 2, \ldots n)$$

so, daß

$$H_n = \sum_{p,q=1}^{n} h_{pq} x_p \bar{x}_q = \sum_{r=1}^{n} z_r \bar{z}_r$$

wird. Dann erhält man

$$h_{pq} = \sum_{r=1}^{n} l_{rp} \bar{l}_{rq}.$$

Setzt man nun

$$A_n(x_p, y_q) = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p y_q,$$

so wird

$$B_n(x_p, y_q) = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} h_{pq} x_p y_q = \sum_{p,q,r=1}^{n} a_{pq} l_{rp} \bar{l}_{rq} x_p y_q.$$

Dies läßt sich in der Form

$$B_n(x_p, y_q) = \sum_{r=1}^{n} A_n(l_{rp} x_p, \bar{l}_{rq} y_q)$$

schreiben. Nun ist aber, wenn α die obere Grenze von A ist,

$$|A_n(l_{rp} x_p, \bar{l}_{rq} y_q)| \leqq \alpha \sqrt{\sum_{p=1}^{n} |l_{rp} x_p|^2 \cdot \sum_{p=1}^{n} |\bar{l}_{rp} y_p|^2}$$

$$\leqq \frac{\alpha}{2} \sum_{p=1}^{n} |l_{rp}|^2 (|x_p|^2 + |y_p|^2).$$

Daher wird

$$|B_n(x_p, y_q)| \leqq \frac{\alpha}{2} \sum_{p,r=1}^{n} |l_{rp}|^2 (|x_p|^2 + |y_p|^2)$$

$$\leqq \frac{\alpha}{2} \sum_{p=1}^{n} h_{pp} (|x_p|^2 + |y_p|^2)$$

$$\leqq \frac{\alpha h}{2} \sum_{p=1}^{n} (|x_p|^2 + |y_p|^2).$$

Für alle Wertsysteme x_p, y_q, die den Bedingungen (2.) des § 1 genügen, ist also in der Tat, wie zu beweisen ist,

$$|B_n(x_p, y_q)| \leqq \alpha h.$$

Eine andere Klasse von Multiplikatorensystemen, die aber mit den eben betrachteten eng verwandt sind, liefert der folgende Satz:

VI. *Es seien*

$$f_p(t),\ g_p(t) \qquad (p=1,2,\ldots)$$

beliebige reelle oder komplexe Funktionen der reellen Variabeln t, und es mögen die absoluten Beträge der Produkte von je zweien dieser Funktionen im Intervall $a \leqq t \leqq b$ *integrabel sein*). Lassen sich dann zwei Zahlen* μ *und* ν *angeben, so daß*

$$\int_a^b |f_p|^2\,dt \leqq \mu,\ \int_a^b |g_p|^2\,dt \leqq \nu \qquad (p=1,2,\ldots)$$

wird, so bilden die Zahlen

$$v_{pq} = \int_a^b f_p\,g_q\,dt \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

ein Multiplikatorensystem für beschränkte Bilinearformen. Ist

$$A = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}\,x_p\,y_q$$

eine beschränkte Bilinearform mit der oberen Grenze α, *so ist die obere Grenze* β *der Bilinearform*

$$B = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}\,v_{pq}\,x_p\,y_q$$

höchstens gleich $\frac{1}{2}\alpha(\mu+\nu)$ **).

Für den n-ten Abschnitt B_n der Form B erhält man nämlich, wenn $\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 \leqq 1$, $\sum_{p=1}^{n} |y_p|^2 \leqq 1$ ist, ähnlich wie vorhin

$$\begin{aligned} |B_n| &= \left| \int_a^b \Big(\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} f_p g_q x_p y_q \Big)\,dt \right| \\ &\leqq \int_a^b \left| \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} f_p g_q x_p y_q \right| dt \\ &\leqq \frac{\alpha}{2} \int_a^b \sum_{p=1}^{n} \left(|f_p x_p|^2 + |g_p y_p|^2 \right) dt \\ &\leqq \frac{\alpha(\mu+\nu)}{2}. \end{aligned}$$

Aus dem Satz VI folgt z. B., daß die Zahlen

$$\frac{1}{a_p + b_q} \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

ein Multiplikatorensystem für beschränkte Bilinearformen bilden, wenn nur die reellen Bestandteile aller Größen a_p, b_p positiv sind und eine positive

---

*) Es kann sich hierbei auch um uneigentliche Integrale handeln.

**) Genauer kann gezeigt werden, daß $\beta \leqq \alpha\sqrt{\mu\nu}$ ist.

untere Grenze besitzen. Denn setzt man

$$f_p(t) = e^{-a_p t},\ g_p(t) = e^{-b_p t},\ a = 0,\ b = \infty,$$

so sind unter den über die Zahlen a_p, b_p gemachten Voraussetzungen die Bedingungen unseres Satzes erfüllt; es wird aber dann

$$v_{pq} = \frac{1}{a_p + b_q}.$$

§ 4.

In enger Beziehung zu dem Satze V steht folgender Satz, der trotz seiner Einfachheit nicht bekannt zu sein scheint:

VII. *Sind*

$$A = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p \bar{x}_q,\ B = \sum_{p,q=1}^{n} b_{pq} x_p \bar{x}_q\ (a_{pq} = \bar{a}_{qp},\ b_{pq} = \bar{b}_{qp})$$

zwei (nichtnegativ) definite Hermitesche Formen, so besitzt auch die Form

$$C = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} b_{pq} x_p \bar{x}_q$$

dieselbe Eigenschaft. Bezeichnet man mit α und α' die größte und die kleinste charakteristische Wurzel der Form A, ferner mit b und b' die größte und die kleinste unter den Zahlen $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$, so liegt jede charakteristische Wurzel der Form C zwischen $\alpha' b'$ und αb.

Man bestimme nämlich wie beim Beweise des Satzes V n^2 Zahlen l_{pq} so, daß

$$b_{pq} = \sum_{r=1}^{n} l_{rp} \bar{l}_{rq}$$

wird. Dann wird

$$C = \sum_{r=1}^{n} A(l_{r1} x_1,\ l_{r2} x_2, \ldots l_{rn} x_n).$$

Dies zeigt schon, daß C nichtnegativ definit ist. Ferner ist bekanntlich stets

$$\alpha' \sum_{p=1}^{n} |u_p|^2 \leqq A(u_1, u_2, \ldots, u_n) \leqq \alpha \sum_{p=1}^{n} |u_p|^2.$$

Daher ergibt sich

$$C \leqq \alpha \sum_{r,p=1}^{n} |l_{rp} x_p|^2 = \alpha \sum_{p=1}^{n} b_{pp} |x_p|^2 \leqq \alpha b \sum_{p=1}^{n} |x_p|^2.$$

Ebenso erhält man

$$C \geqq \alpha' b' \sum_{p=1}^{n} |x_p|^2.$$

Hieraus folgt aber die Richtigkeit des zweiten Teils unseres Satzes.

Ist insbesondere A eine positive *Hermite*sche Form, d. h. $\alpha' > 0$, so erkennt man, daß auch C diese Eigenschaft besitzt, es sei denn, daß $b' = 0$ wird. Dies tritt aber nur dann ein, wenn B eine der n Variabeln überhaupt nicht enthält, d. h. wenn in dem Koeffizientenschema von B eine Zeile und die zugehörige Kolonne lauter Nullen enthalten.

Ich will noch eine Anwendung des Satzes VII angeben.

Man bezeichne nach dem Vorgange von *Hilbert**) eine für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte, reelle oder komplexe *stetige* Funktion $K(s,t)$ der reellen Variabeln s und t als einen *nichtnegativ definiten Hermiteschen Kern*, wenn $K(s,t)$ und $K(t,s)$ konjugiert komplexe Größen sind und das Doppelintegral

$$I(x) = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\, x(s)\, \bar{x}(t)\, ds\, dt$$

einen nichtnegativen Wert erhält, wie auch die stetige Funktion $x(s)$ gewählt wird**). — Man beweist ohne Mühe, wie *W. H. Young****) gezeigt hat, daß der Kern $K(s,t)$ stets und nur dann nichtnegativ definit wird, wenn für jedes n und jedes System von n Zahlen $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ des Intervalls $a \leqq s \leqq b$ die *Hermite*sche Form

$$H = \sum_{p,q=1}^{n} K(s_p, s_q)\, x_p\, \bar{x}_q$$

nichtnegativ definit ist. Auf Grund dieses Kriteriums ergibt sich aus dem Satz VII unmittelbar der Satz:

VII*. *Sind $K(s,t)$ und $L(s,t)$ zwei nichtnegativ definite (stetige) Hermitesche Kerne, so besitzt das Produkt $K(s,t)\, L(s,t)$ dieselbe Eigenschaft.*

---

*) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Erste Mitteilung, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl. 1904, S. 79.

**) *Hilbert* betrachtet a. a. O. nur *positiv* definite Kerne, d. h. solche, für die das Integral $I(x)$ positiv und nur dann Null wird, wenn $x(s) = 0$ ist.

***) „A note on a class of symmetric functions and on a theorem required in the theory of integral equations", Messenger of Mathematics, Vol. XL (1910), S. 37—43. — *Young* beschränkt sich auf die Betrachtung reeller symmetrischer Kerne, doch läßt sich sein Beweis unmittelbar auch auf *Hermite*sche Kerne übertragen. Die Voraussetzung, daß $K(s,t)$ eine stetige Funktion sein soll, scheint von wesentlicher Bedeutung zu sein. Es genügt ferner keineswegs zu wissen, daß die Formen H positiv sind, um behaupten zu können, daß $K(s,t)$ ein positiv definiter Kern ist.

§ 5.

Mit Hilfe der Integralformel

$$\sum_{p,q=1}^{n}\left(\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p-q}\right)x_p y_q=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,[\Sigma(x_p\sin pt-y_p\cos pt)]^2\,dt,$$

in der für $p=q$ das Zeichen $\frac{1}{p-q}$ durch die Null zu ersetzen ist, hat *Hilbert**) bewiesen, daß die beiden Bilinearformen

$$A=\sum_{\substack{p,q=1\\(p\neq q)}}^{\infty}\frac{x_p y_q}{p-q},\quad S=\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{x_p y_q}{p+q}$$

beschränkt sind. Als obere Schranken für A und S ergeben sich hierbei die Zahlen 4π und 2π.

Ich will nun zeigen, daß *man die Beschränktheit der Formen A und S sehr einfach aus dem Hilfssatz* II *des* § 1 *folgern kann.* Man setze nämlich

$$S_0=\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{x_p y_q}{p+q-1}$$

und

$$N(A)=A'A=\sum_{p,q=1}^{\infty}c_{pq}x_p x_q,\quad N(S_0)=S_0'S_0=\sum_{p,q=1}^{\infty}d_{pq}x_p x_q.$$

Dann wird

$$c_{pp}+d_{pp}=\sum_{r=1}^{\infty}{}'\frac{1}{(p-r)^2}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(p+s-1)^2}=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{(p-r)^2}=2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^2}=\frac{\pi^2}{3}\qquad(r\neq p)$$

und für $p\neq q$

$$\begin{aligned}c_{pq}+d_{pq}&=\sum_{r=1}^{\infty}{}'\frac{1}{(p-r)(q-r)}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(p+s-1)(q+s-1)}\\&=\sum_{r=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(p-r)(q-r)}=\frac{1}{q-p}\sum_{r=-\infty}^{\infty}{}'\left[\frac{1}{p-r}-\frac{1}{q-r}\right].\end{aligned}\qquad(r\neq p,\ r\neq q)$$

Dies ist aber, wie man leicht erkennt, gleich $\frac{2}{(q-p)^2}$. Also ergibt sich

$$(1.)\qquad N(A)+N(S_0)=\frac{\pi^2}{3}\sum_{p=1}^{\infty}x_p^2+\sum_{\substack{p,q=1\\(p\neq q)}}^{\infty}\frac{2}{(q-p)^2}x_p x_q.$$

Die erste rechts auftretende Form ist gewiß beschränkt, und zwar ist ihre obere Grenze gleich $\frac{\pi^2}{3}$. Die zweite Form genügt aber den Bedingungen des Satzes I, und da hier die Reihen

---

*) Vgl. *H. Weyl*, „Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des *Fourier*schen Integraltheorems", Inaugural-Dissertation, Göttingen 1908, S. 83. — Einen elementaren Beweis für die Beschränktheit der Form S hat *F. Wiener*, Math. Annalen, Bd. 68 (1910), S. 361—366, angegeben. Die Formen A und S sind, wie *O. Toeplitz*, „Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen" (Nachr. d. K. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl., 1910), gezeigt hat, in einer allgemeinen Klasse von beschränkten Bilinearformen als spezielle Fälle enthalten.

$$\sum_{r=1}^{\infty}{}' \frac{2}{(r-p)^2}, \quad \sum_{s=1}^{\infty}{}' \frac{2}{(q-s)^2} \qquad (r \neq p,\ s \neq q)$$

kleiner sind als $4 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$, so ist ihre obere Grenze höchstens gleich $\frac{2\pi^2}{3}$. Daher ist die obere Grenze von (1.) höchstens gleich $\frac{\pi^2}{3} + \frac{2\pi^2}{3} = \pi^2$. *Die oberen Grenzen von A und S_0, und folglich auch von S, sind also höchstens gleich π.*

Allgemeiner setze man, wenn λ eine beliebige reelle Zahl ist,

$$A_\lambda = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p-q+\lambda}, \quad S_\lambda = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p+q-1+\lambda};$$

hierbei sind für ein ganzzahliges λ diejenigen Glieder, deren Nenner 0 sind, nicht mitzuschreiben. Man erhält dann leicht für ein ganzzahliges λ

$$N(A_\lambda) + N(S_\lambda) = N(A_0) + N(S_0)$$

und für ein nicht ganzzahliges λ

$$N(A_\lambda) + N(S_\lambda) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r+\lambda)^2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} x_p{}^2 = \frac{\pi^2}{\sin^2 \lambda\pi} \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2.$$

Daher sind die Formen A_λ und S_λ für jedes λ beschränkt; ihre oberen Grenzen sind für ein ganzzahliges λ höchstens gleich π und für ein nicht ganzzahliges λ höchstens gleich $\frac{\pi}{|\sin \lambda\pi|}$.

Um eine Anwendung des Satzes V zu geben, will ich zeigen, daß die Bilinearform

$$A^{(\mu)} = \sum_{\substack{p,q=1 \\ (p \neq q)}}^{\infty} \frac{(pq)^{\frac{\mu-1}{2}}}{p^\mu - q^\mu} x_p y_q,$$

die für $\mu = 1$ in die vorhin betrachtete Form A übergeht, auch *für jedes positive $\mu > 1$ beschränkt ist, und daß ihre obere Grenze höchstens gleich $\frac{\pi}{\mu}$ wird.* — Es genügt hierzu, zu beweisen, daß die quadratische (reelle *Hermite*sche) Form

$$\text{(2.)} \qquad \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{p-q}{p^\mu - q^\mu} (pq)^{\frac{\mu-1}{2}} x_p x_q,$$

in der für $p = q$ der in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinende Koeffizient gleich $\frac{1}{\mu}$ zu setzen ist, nichtnegativ definit ist.

Dies ergibt sich folgendermaßen. Sind $u_1, u_2, \ldots$ beliebige komplexe Zahlen mit positiven reellen Bestandteilen, so folgt aus der Formel

$$\frac{1}{u_p + \bar{u}_q} = \int_0^\infty e^{-(u_p + \bar{u}_q)t}\, dt,$$

daß die *Hermite*sche Form

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p \overline{x}_q}{u_p + \overline{u}_q}$$

nichtnegativ definit ist*). Sind daher $s_1, s_2, \ldots$ beliebige positive Zahlen und bedeutet α eine beliebige komplexe Zahl, so bilden die Zahlen

$$\frac{\alpha + \overline{\alpha}}{\alpha s_p + \overline{\alpha} s_q}$$

und folglich auch, wenn ε eine Größe vom absoluten Betrage 1 ist, die Zahlen

$$\frac{1-\varepsilon}{s_p - \varepsilon s_q}$$

das Koeffizientensystem einer definiten *Hermite*schen Form. Durchläuft nun, wenn m eine positive ganze Zahl ist, ε die von 1 verschiedenen m-ten Einheitswurzeln, so wird

$$\frac{1}{m} \sum_{\varepsilon} \frac{1-\varepsilon}{s_p - \varepsilon s_q} = \frac{s_p^{m-1} - s_q^{m-1}}{s_p^m - s_q^m} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{m} \sum_{\varepsilon} \frac{1-\varepsilon}{s_p - \varepsilon s_q} = \frac{m-1}{m s_p},$$

je nachdem s_q von s_p verschieden oder gleich s_p ist. Für jede positive ganze Zahl $l < m$ erhält man daher nach Satz VII das Koeffizientensystem (h_{pq}) einer definiten quadratischen Form, indem für $s_p \neq s_q$

$$h_{pq} = \frac{s_p^l - s_q^l}{s_p^m - s_q^m} = \prod_{r=l+1}^{m} \frac{s_p^{r-1} - s_q^{r-1}}{s_p^r - s_q^r}$$

und für $s_p = s_q$

$$h_{pq} = \frac{l}{m s_p^{m-l}} = \prod_{r=l+1}^{m} \frac{r-1}{r s_p}$$

setzt. Schreibt man nun $s_p^{\frac{1}{l}}$ für s_p und μ für $\frac{m}{l}$, so erkennt man, daß der Ausdruck

$$\text{(3.)} \qquad \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{s_p - s_q}{s_p^{\mu} - s_q^{\mu}} x_p x_q,$$

in dem für $s_p = s_q$ der Koeffizient von $x_p x_q$ gleich $\frac{1}{\mu s_p^{\mu-1}}$ zu setzen ist, für jedes System von positiven Zahlen $s_1, s_2, \ldots$ und für jedes rationale $\mu > 1$ eine nichtnegativ definite quadratische Form repräsentiert. Durch

*) Auf rein algebraischem Wege folgt dies aus der leicht zu beweisenden Determinantenrelation

$$\left| \frac{1}{u_p + v_q} \right| = \frac{\prod_{p<q} (u_p - u_q)(v_p - v_q)}{\prod_{p,q} (u_p + v_q)} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots n)$$

Grenzübergang ergibt sich sofort, daß dies auch für ein irrationales $\mu > 1$ richtig bleibt.

Daß nun die quadratische Form (2.) definit ist, folgt hieraus als ganz spezieller Fall, indem man in (3.) für $s_1, s_2, \ldots$ die Zahlen $1, 2, \ldots$ wählt und x_r durch $r^{\frac{\mu-1}{2}} x_r$ ersetzt.

§ 6.

Schreibt man den n-ten Abschnitt A_n der alternierenden Form $A = \sum_{p \neq q} \frac{x_p y_q}{p-q}$ in der Gestalt

$$A_n = \sum_{\substack{p,q=1 \\ (q>p)}}^{n} \frac{x_p y_q - x_q y_p}{p-q}$$

und ersetzt, wenn t eine reelle Größe bedeutet, x_p und y_p durch $x_p \sin pt$, bzw. $x_p \cos pt$, so erhält man, da π eine obere Schranke von A ist, für reelle Werte x_p

$$\left| \sum_{\substack{p,q=1 \\ (q>p)}}^{n} \frac{\sin(p-q)t}{p-q} x_p x_q \right| \leqq \pi \sqrt{\sum_{p=1}^{n} (x_p \sin pt)^2 \cdot \sum_{p=1}^{n} (x_p \cos pt)^2}$$
$$\leqq \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{n} x_p^2 (\sin^2 pt + \cos^2 pt) = \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{n} x_p^2.$$

Hieraus folgt, daß der Ausdruck

$$F(t) = \sum_{\substack{p,q=1 \\ (p \neq q)}}^{\infty} \frac{\sin(p-q)t}{p-q} x_p x_q$$

eine reelle quadratische Form darstellt, deren obere Grenze höchstens gleich π ist.

Einen einfacheren Beweis für die Beschränktheit der Form $F(t)$ und eine genauere Abschätzung der oberen Grenze liefert die folgende Methode: Es genügt offenbar $0 \leqq t \leqq \pi$ anzunehmen. Setzt man

$$\Phi(t) = t \sum_{p=1}^{n} x_p^2 + \sum_{\substack{p,q=1 \\ (p \neq q)}}^{n} \frac{\sin(p-q)t}{p-q} x_p x_q = t \sum_{p=1}^{n} x_p^2 + F_n(t),$$

so wird

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \sum_{p,q=1}^{n} x_p x_q \cdot \cos(p-q)t = \Big(\sum_{p=1}^{n} x_p \cos pt\Big)^2 + \Big(\sum_{p=1}^{n} x_p \sin pt\Big)^2.$$

Daher ist für jedes System reeller Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Funktion $\Phi(t)$ von t monoton wachsend, also

$$\Phi(0) \leqq \Phi(t) \leqq \Phi(\pi).$$

Dies gibt aber

(1.) $$-t \sum_{p=1}^{n} x_p^2 \leqq F_n(t) \leqq (\pi - t) \sum_{p=1}^{n} x_p^2.$$

Folglich ist die Form $F(t)$ beschränkt und ihre obere Grenze (für $0 \leqq t \leqq \pi$) höchstens gleich der größeren der beiden Zahlen t und $\pi - t$.

Die Form $F(t)$ ist deshalb interessant, weil sie wohl das einfachste Beispiel für eine *reelle quadratische Form liefert, die beschränkt, aber (für jedes t, das nicht ein ganzzahliges Multiplum von π ist) nicht absolut beschränkt ist**). Dies erkennt man folgendermaßen: Wäre $F(t)$ für ein gegebenes t absolut beschränkt, so müßte sich eine Zahl M angeben lassen, so daß

$$\sum_{\substack{p,q=1 \\ (p \neq q)}}^{n} \left| \frac{\sin(p-q)t}{p-q} \right| \leqq M(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) = Mn$$

oder, ausführlicher geschrieben,

$$2 \sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu) \left| \frac{\sin \nu t}{\nu} \right| \leqq Mn$$

wird. Dies gibt aber

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \left| \frac{\sin \nu t}{\nu} \right| \leqq \frac{M}{2} + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} |\sin \nu t| < \frac{M}{2} + 1.$$

Eine solche Zahl M kann aber, wenn t nicht ein ganzzahliges Multiplum von π ist, nicht existieren, da die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \nu t}{\nu} \right|$$

alsdann bekanntlich divergent ist.

Setzt man noch in (1.) $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, so erhält man (für $0 \leqq t \leqq \pi$)

$$-tn \leqq 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu) \frac{\sin \nu t}{\nu} \leqq (\pi - t)n,$$

also

$$(2.) \qquad -\frac{t}{2} + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sin \nu t \leqq \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\sin \nu t}{\nu} \leqq \frac{\pi - t}{2} + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sin \nu t.$$

Hieraus folgt speziell, daß für alle n und alle reellen t

$$(3.) \qquad S_n(t) = \left| \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\sin \nu t}{\nu} \right| < \frac{\pi}{2} + 1 = 2{,}570\ldots$$

ist.

---

*) Ein allgemeines Verfahren zur Herstellung von quadratischen Formen, die diese Eigenschaft besitzen, hat *O. Toeplitz* in der auf S. 16 zitierten Abhandlung angegeben. — Das einfachste Beispiel einer reellen alternierenden Bilinearform, die beschränkt, aber nicht absolut beschränkt ist, repräsentiert die Form $\sum_{p \neq q} \frac{x_p y_q}{p-q}$; vgl. *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*, a. a. O., S. 308.

Daß der Ausdruck $S_n(t)$ unterhalb einer von n und t unabhängigen Zahl M liegen muß, hat zuerst *A. Kneser**) bewiesen. Diese Tatsache spielt insbesondere in den neueren Arbeiten von *L. Fejér* über überall stetige Funktionen, deren *Fourier*sche Reihen an einzelnen Stellen divergieren, eine nicht unwichtige Rolle**). Die durch (3.) gelieferte Abschätzung von $S_n(t)$ hat *Fejér* in seiner Note „Sur les sommes partielles de la série de *Fourier*"***) mit Hilfe eines interessanten allgemeinen Satzes über *Fourier*sche Reihen gewonnen.

Schreibt man in (2.) $\pi - t$ für t, so erhält man durch Addition beider Ungleichungen (für $n = 2m$)

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} \sin(2\mu-1)t \leqq 2\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)t}{2\mu-1} \leqq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} \sin(2\mu-1)t.$$

Daher ist für alle m und alle reellen t

$$\left|\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)t}{2\mu-1}\right| < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}. \tag{4.}$$

Beachtet man noch, daß für $0 < t < \pi$

$$\sum_{\mu=1}^{k} \sin(2\mu-1)t = \frac{\sin^2 kt}{\sin t} \geqq 0$$

ist, so erhält man wegen (4.) und

$$2\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)t}{2\mu-1} - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)}{\mu} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)t}{\mu(2\mu-1)} \geqq 0$$

die für $0 \leqq t \leqq \pi$ geltende Formel

$$0 \leqq \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)t}{\mu} < 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right).$$

Hieraus folgt zugleich, daß für alle m und alle reellen t

$$\left|\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)t}{\mu}\right| < \frac{\pi}{2} + 1$$

---

*) „Beiträge zur Theorie der *Sturm-Liouville*schen Darstellung willkürlicher Funktionen", Math. Annalen, Bd. 60 (1905), S. 402—423, § 1.

**) Vgl. vor allem die Arbeit von *L. Fejér*, „*Lebesgue*sche Konstanten und divergente *Fourier*reihen", dieses Journal, Bd. 138 (1910), S. 22—53. — Siehe auch *A. Haar*, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", Inaug.-Dissertation, Göttingen, 1909, S. 17.

***) Comptes Rendus de l' Acad. des Sciences, Paris, Mai 1910, S. 1299. — Es wird hier noch gezeigt, daß die obere Grenze der Ausdrücke $S_n(t)$ nicht kleiner sein kann als $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 1{,}85\ldots$.

wird. — Auch diese Ungleichung findet sich in der erwähnten Note von *L. Fejér.*

Ich will noch zeigen, daß man die Ungleichung (3.) durch die präzisere Ungleichung

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\sin \nu t}{\nu}\right| < \frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}=2{,}389\ldots$$

ersetzen kann. Wegen (2.) genügt es hierzu, zu zeigen, daß

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\sin \nu t\right| < \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}. \tag{5.}$$

ist*). — Dies beweise ich folgendermaßen. Man betrachte die alternierende Bilinearform

$$D=\sum_{\substack{p,q=1\\(p<q)}}^{n}(x_p y_q - x_q y_p).$$

Die charakteristische Determinante dieser Form ist, wie man leicht zeigt,

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} -x, & 1, & 1, \ldots & 1\\ -1, & -x, & 1, \ldots & 1\\ -1, & -1, & -x, \ldots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1, & -1, & -1, \ldots & -x\end{vmatrix}=(-1)^n\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{2}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $\Delta(x)=0$ sind die Größen

$$i\operatorname{cotg}\frac{(2\nu+1)\pi}{2n}. \qquad (\nu=0,1,\ldots n-1)$$

Für $\nu=0$ erhält man die dem absoluten Betrage nach größte Wurzel. Da aber

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}<\frac{2n}{\pi}$$

ist, so wird für reelle $x_p y_q$

$$|D|\leqq\frac{2n}{\pi}\sqrt{\sum_{p=1}^{n}x_p^2\cdot\sum_{p=1}^{n}y_p^2}\leqq\frac{n}{\pi}\sum_{p=1}^{n}(x_p^2+y_p^2).$$

Setzt man speziell $x_p=\sin pt$, $y_p=\cos pt$, so erhält man

$$\left|\sum_{\substack{p,q=1\\(p<q)}}^{n}\sin(p-q)t\right|\leqq\frac{n^2}{\pi},$$

---

*) Aus der Formel

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\sin\frac{\nu\pi}{n}$$

geht hervor, daß die genaue obere Grenze des in (5.) links stehenden Ausdrucks nicht kleiner als $\frac{2}{\pi}$ sein kann.

oder

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)\sin\nu t\right| \leqq \frac{n^2}{\pi},$$

also

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\sin\nu t\right| \leqq \frac{1}{\pi}+\frac{1}{n^2}\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu\sin\nu t\right| < \frac{1}{\pi}+\frac{n(n-1)}{2n^2} < \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}.$$

§ 7.

Es sei $K(s,t)$ eine reelle Funktion der positiven Argumente s, t, die folgenden Bedingungen genügt:

1. *$K(s,t)$ wird niemals negativ und ist homogen vom Grade -1.*
2. *In jedem endlichen Gebiet*

$$0 < a \leqq s \leqq b,\ 0 < a \leqq t \leqq b$$

ist $K(s,t)$ (im Riemannschen Sinne) integrabel.

3. *Das Integral*

$$k = \int_0^\infty \frac{K(s,1)}{\sqrt{s}}\,ds = \int_0^\infty \frac{K(1,t)}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^\infty \frac{K(s,1)+K(1,s)}{\sqrt{s}}\,ds \text{ *)}$$

hat einen endlichen Wert.

Sind dann $f(s)$ und $g(s)$ zwei nicht negative Funktionen des positiven Arguments s, die in jedem Intervall $0 < a \leqq s \leqq b$ integrabel sind und für die die Integrale

$$F = \int_0^\infty f^2(s)\,ds,\ G = \int_0^\infty g^2(s)\,ds$$

endliche Werte haben, so existiert, wie ich behaupte, auch das Doppelintegral

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty K(s,t)\,f(s)\,g(t)\,ds\,dt,$$

und zwar ist stets

(1.) $$I \leqq k\sqrt{FG}\ \text{**)}.$$

Es genügt offenbar, zu zeigen, daß für je zwei positive Zahlen $a < b$

$$I_{a,b} = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\,f(s)\,g(t)\,ds\,dt \leqq k\sqrt{FG}$$

---

*) Das Übereinstimmen dieser drei Integrale folgt aus der vorausgesetzten Homogeneitätseigenschaft der Funktion $K(s,t)$.

**) Für $K(s,t) = \frac{1}{s+t}$ hat eine ähnliche Ungleichung bereits *H. Weyl* (a. a. O., S. 85) bewiesen.

ist. Denn die Formel (1.) wird dann erhalten, indem man a gegen 0 und b gegen ∞ konvergieren läßt. Diese Schlußweise ist gestattet, weil die zu integrierende Funktion nicht negativ ist.

Man setze nun in $I_{a,b}$

$$s = u,\ t = uv.$$

Dann wird wegen der Homogeneität von $K(s, t)$

$$I_{a,b} = \iint K(1, v)\, f(u)\, g(uv)\, du\, dv.$$

Das Integrationsgebiet ist hierbei durch die Ungleichungen

$$a \leqq u \leqq b,\ \frac{a}{u} \leqq v \leqq \frac{b}{u}$$

bestimmt. Da nun

$$\frac{a}{b} \leqq \frac{a}{u},\ \frac{b}{u} \leqq \frac{b}{a}$$

wird, so vergrößern wir das Integrationsgebiet, wenn wir es durch das Rechteck

$$a \leqq u \leqq b,\ \frac{a}{b} \leqq v \leqq \frac{b}{a}$$

ersetzen. Folglich ist

$$I_{a,b} \leqq \int_a^b \int_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}} K(1, v)\, f(u)\, g(uv)\, du\, dv = \int_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}} K(1, v)\, dv \int_a^b f(u)\, g(uv)\, du.$$

Nun ist auf Grund einer bekannten Ungleichung

$$\left[\int_a^b f(u)\, g(uv)\, du\right]^2 \leqq \int_a^b f^2(u)\, du \cdot \int_a^b g^2(uv)\, du.$$

Ferner ist

$$\int_a^b f^2(u)\, du \leqq \int_0^\infty f^2(u)\, du = F$$

und

$$\int_a^b g^2(uv)\, du = \frac{1}{v} \int_{av}^{bv} g^2(u)\, du \leqq \frac{1}{v} \int_0^\infty g^2(u)\, du = \frac{G}{v}.$$

Daher wird

$$\int_a^b f(u)\, g(uv)\, du \leqq \frac{1}{\sqrt{v}} \sqrt{FG}$$

und also, wie zu beweisen ist,

$$I_{a,b} \leqq \sqrt{FG} \int_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}} \frac{K(1, v)}{\sqrt{v}}\, dv \leqq k\sqrt{FG}.$$

Man setze nun, wenn

$$a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$$

beliebige positive Zahlen sind,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Sind ferner $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$ zwei Systeme nicht negativer Zahlen mit konvergenten Quadratsummen

$$(2.) \qquad X = \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2, \quad Y = \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2,$$

so bestimme man die Funktionen $f(s)$ und $g(t)$ folgendermaßen: für

$$s_{n-1} < s \leqq s_n, \quad t_{n-1} < t \leqq t_n \qquad (s_0 = t_0 = 0)$$

soll

$$f(s) = \frac{x_n}{\sqrt{a_n}}, \quad g(t) = \frac{y_n}{\sqrt{b_n}}$$

sein. Ist ferner $\lim_{n=\infty} s_n = \sigma$ oder $\lim_{n=\infty} t_n = \tau$ eine endliche Zahl, so verstehe man für $s \geqq \sigma$, bzw. für $t \geqq \tau$ unter $f(s)$ oder $g(t)$ den Wert 0. Durch diese Festsetzungen sind dann $f(s)$ und $g(t)$ für alle positiven Werte des Arguments eindeutig definiert. Diese Funktionen sind jedenfalls in jedem endlichen Intervall integrabel; ferner wird

$$F = \int_0^{\infty} f^2(s)\, ds = X, \quad G = \int_0^{\infty} g^2(s)\, ds = Y.$$

Die Formel (1.) geht aber dann über in die Formel

$$(3.) \qquad \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{\sqrt{a_p b_q}} \int_{s_{p-1}}^{s_p} \int_{t_{q-1}}^{t_q} K(s,t)\, ds\, dt \leqq k\sqrt{XY},$$

d. h. *die links stehende Bilinearform ist beschränkt und ihre obere Grenze ist höchstens gleich der Zahl k.*

Ein einfacheres Resultat erhält man, wenn man $K(s,t)$ noch folgender Bedingung unterwirft:

4. Bei festem s soll $K(s,t)$ mit wachsendem t und bei festem t mit wachsendem s nicht zunehmen.

Dann wird offenbar

$$\int_{s_{p-1}}^{s_p} \int_{t_{q-1}}^{t_q} K(s,t)\, ds\, dt \geqq K(s_p, t_q)\,(s_p - s_{p-1})\,(t_q - t_{q-1})$$
$$\geqq K(s_p, t_q)\, a_p b_q.$$

Aus der Formel (3.) ergibt sich daher, daß auch *der Ausdruck*

$$(4.) \qquad \sum_{p,q=1}^{\infty} K(s_p, t_q)\sqrt{a_p b_q}\, x_p y_q$$

eine beschränkte Bilinearform darstellt, deren obere Grenze höchstens gleich k ist.

Setzt man z. B., wenn m irgend eine positive Zahl bedeutet,

$$K(s,t)=\frac{1}{\sqrt[m]{s^m+t^m}},$$

so wird

$$k=\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt[m]{1+t^m}\cdot\sqrt{t}}=\frac{1}{m}\int_0^\infty (1+u)^{-\frac{1}{m}}u^{\frac{1}{2m}-1}\,du=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)}{m\,\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}$$

und speziell $k=\pi$ für $m=1$. *Daher ist für alle Wertsysteme x_p, y_q, für welche die Reihen* (2.) *konvergieren, und für alle Zahlen s_n, t_n, die den Bedingungen*

$$0<s_1<s_2<\cdots,\quad 0<t_1<t_2<\cdots$$

genügen:

$$\left|\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\sqrt{(s_p-s_{p-1})(t_q-t_{q-1})}}{\sqrt[m]{s_p^m+t_q^m}}x_p y_q\right|\leqq\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)}{m\,\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}\sqrt{\sum_{p=1}^{\infty}x_p^2\cdot\sum_{p=1}^{\infty}y_p^2}.$$

Ein anderes interessantes Beispiel erhält man, wenn man unter $K(s,t)$ den reziproken Wert der größeren der beiden Zahlen s und t versteht. Dann wird, wie man leicht erkennt, $k=4$. Für $s_n=t_n$, $x_n=y_n$ ergibt sich daher

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{s_p-s_{p-1}}{s_p}x_p^2+2\sum_{\substack{p,q=1\\(q>p)}}^{\infty}\frac{\sqrt{(s_p-s_{p-1})(s_q-s_{q-1})}}{s_q}x_p x_q\right|\leqq 4\sum_{p=1}^{\infty}x_p^2.$$

Wählt man in (4.) speziell $a_n=b_n=1$, also $s_n=t_n=n$, so erhält man die Bilinearform

$$A(x,y)=\sum_{p,q=1}^{\infty}K(p,q)\,x_p y_q. \tag{5.}$$

Ich will nun zeigen, *daß die obere Grenze α dieser Form für jede Funktion $K(s,t)$, die den Bedingungen 1.—4. genügt, genau gleich k ist.*

Da nämlich auf Grund unseres allgemeineren Resultats $\alpha\leqq k$ sein muß, so wird für alle positiven Werte $x_1, x_2, \ldots$, für welche die Reihe $X=\sum_p x_p^2$ konvergiert,

$$Q=\frac{A(x,x)}{X}\leqq k. \tag{6.}$$

Man setze nun speziell, wenn $\varrho>\frac{1}{2}$ ist, $x_n=\frac{1}{n^\varrho}$. Dann wird $X=\zeta(2\varrho)$ und, wie man auf Grund der Gleichung

$$K(p,p)=\frac{K(1,1)}{p}$$

leicht erkennt,

$$A(x,x)=-K(1,1)\zeta(2\varrho+1)+\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=p}^{\infty}\frac{K(p,q)}{(pq)^{\varrho}}+\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{p=q}^{\infty}\frac{K(p,q)}{(pq)^{\varrho}}.$$

Nun ist aber wegen der Eigenschaften *1.* und *4.* der Funktion $K(s,t)$

$$\sum_{q=p}^{\infty}\frac{K(p,q)}{(pq)^{\varrho}}\geqq\int_{p}^{\infty}\frac{K(p,t)}{(pt)^{\varrho}}dt=\frac{1}{p^{2\varrho}}\int_{1}^{\infty}\frac{K(1,t)}{t^{\varrho}}dt$$

und ebenso

$$\sum_{p=q}^{\infty}\frac{K(p,q)}{(pq)^{\varrho}}\geqq\frac{1}{q^{2\varrho}}\int_{1}^{\infty}\frac{K(s,1)}{s^{\varrho}}ds.$$

Daher wird

$$A(x,x)\geqq-K(1,1)\zeta(2\varrho+1)+\zeta(2\varrho)\int_{1}^{\infty}\frac{K(u,1)+K(1,u)}{u^{\varrho}}du.$$

Bezeichnet man den Quotienten (6.) in unserem Fall mit Q_{ϱ}, so ergibt sich also

$$(7.)\qquad k\geqq Q_{\varrho}\geqq-K(1,1)\frac{\zeta(2\varrho+1)}{\zeta(2\varrho)}+\int_{1}^{\infty}\frac{K(u,1)+K(1,u)}{u^{\varrho}}du.$$

Nun ist allgemein, wenn $\varphi(u)$ eine nicht negative, in jedem endlichen Intervall $1\leqq a\leqq u\leqq b$ integrable Funktion ist, für die das Integral

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(u)}{\sqrt{u}}du$$

existiert,

$$\lim_{\varrho=\frac{1}{2}+0}\int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(u)}{u^{\varrho}}du=\int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(u)}{\sqrt{u}}du.$$

Läßt man daher in (7.) ϱ gegen $\frac{1}{2}$ konvergieren, so erhält man, da

$$\lim_{\varrho=\frac{1}{2}}\zeta(2\varrho+1)=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad\lim_{\varrho=\frac{1}{2}}\zeta(2\varrho)=\infty$$

und

$$\int_{1}^{\infty}\frac{K(u,1)+K(1,u)}{\sqrt{u}}du=k$$

ist,

$$\lim_{\varrho=\frac{1}{2}+0}Q_{\varrho}=k,$$

d. h. man kann, wenn ε eine beliebige positive Größe ist, ϱ so nahe bei $\frac{1}{2}$ wählen, daß $Q_{\varrho}>k-\varepsilon$ wird. Dies zeigt deutlich, daß die obere Grenze α der Form (5.) nicht kleiner als k sein kann. Da nun $\alpha\leqq k$ war, so muß $\alpha=k$ sein.

Der Vollständigkeit wegen will ich noch erwähnen, daß die Resultate dieses Paragraphen sich auch auf Funktionen von mehr als zwei Variabeln übertragen lassen. Es gilt nämlich folgender Satz:

Es sei $K(s_1, s_2, \dots s_n)$ *eine nichtnegative Funktion der positiven Variabeln* $s_1, s_2, \dots s_n$, *die homogen vom Grade* $1-n$, *in jedem endlichen Gebiet*

$$0 < a \leqq s_\nu \leqq b \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

integrabel ist, und für die das $(n-1)$*-fache Integral*

$$k_n = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{K(1, s_2, s_3, \dots s_n)}{\sqrt[n]{s_2 s_3 \cdots s_n}} ds_2 ds_3 \cdots ds_n$$

einen endlichen Wert hat. Sind dann $f_1(s), f_2(s), \dots f_n(s)$ *beliebige nichtnegative Funktionen des positiven Arguments* s, *die in jedem endlichen Intervall* $0 < a \leqq s \leqq b$ *integrabel sind, und für die die Integrale*

$$F_\nu = \int_0^\infty f_\nu^n(s)\, ds \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

endliche Werte haben, so existiert das n*-fache Integral*

$$I_n = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty K(s_1, s_2, \dots s_n) f_1(s_1) f_2(s_2) \cdots f_n(s_n)\, ds_1 ds_2 \cdots ds_n,$$

und zwar ist

$$I_n \leqq k_n \sqrt[n]{F_1 F_2 \cdots F_n}.$$

Setzt man noch voraus, daß K *für jedes* ν *bei festen* $s_1, \dots s_{\nu-1}, s_{\nu+1}, \dots s_n$ *und wachsendem* s_ν *nicht zunehmen soll, so ist, wenn*

$$a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \dots \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

beliebige positive Zahlen sind und

$$s_n^{(\nu)} = a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

gesetzt wird, die n*-fach unendliche Reihe*

$$U = \sum_{p_1, \dots p_n = 1}^{\infty} K(s_{p_1}^{(1)}, s_{p_2}^{(2)}, \dots s_{p_n}^{(n)}) [a_{p_1}^{(1)} a_{p_2}^{(2)} \cdots a_{p_n}^{(n)}]^{\frac{n-1}{n}} x_{p_1}^{(1)} x_{p_2}^{(2)} \cdots x_{p_n}^{(n)}$$

für alle nichtnegativen Wertsysteme $x_p^{(1)}, x_p^{(2)}, \dots x_p^{(n)}$ *konvergent, für welche die Reihen*

$$X_\nu = \sum_{p=1}^{\infty} (x_p^{(\nu)})^n \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

konvergent sind, und zwar ist stets

$$U \leqq k_n \sqrt[n]{X_1 X_2 \cdots X_n}.$$

In dieser Ungleichung kann, wenn speziell alle $a_\mu^{(\nu)}$ *gleich* 1 *gesetzt werden, die Zahl* k_n *durch keine kleinere Zahl ersetzt werden.*

Über die Klassenzahlen der Kreisteilungskörper.

Von Herrn *Ph. Furtwängler* in Bonn.

Herr *H. Weber**) hat bewiesen, daß die Klassenzahl des Körpers der 2^x-ten Einheitswurzeln ungerade ist. Dieses Theorem ist ein spezieller Fall des folgenden allgemeineren Satzes, dessen Beweis hier gegeben werden soll:

Bedeutet l eine beliebige Primzahl, so ist die Klassenzahl des Körpers der l^x-ten Einheitswurzeln stets dann und nur dann durch l teilbar, wenn die Klassenzahl des Körpers der l-ten Einheitswurzeln durch l teilbar ist.

Daß das *Weber*sche Resultat in dem vorstehenden Satze enthalten ist, erkennt man auf Grund der folgenden Ausführungen, wenn man beachtet, daß die Klassenzahl des Körpers $(\sqrt{-1})$ der vierten Einheitswurzeln ungerade ist, oder noch einfacher, wenn man den Körper der rationalen Zahlen als Körper der zweiten Einheitswurzeln auffaßt. Der Beweis, der hier von dem allgemeineren Satze gegeben wird, ist wesentlich von dem Beweisverfahren verschieden, das Herr *Weber* in dem speziellen Falle $l=2$ angewandt hat.

Zum Beweise unseres Satzes wenden wir den Schluß von n auf $n+1$ an, d. h. wir zeigen zunächst, daß die Klassenzahl des Körpers K der l^{x+1}-ten Einheitswurzeln stets dann zu l prim ist, wenn die Klassenzahl des Körpers k der l^x-ten Einheitswurzeln diese Eigenschaft hat. Der Körper K ist relativ zyklisch vom Primzahlrelativgrad in bezug auf k. Es lassen sich daher in diesem Falle ohne weiteres alle Theoreme verwenden, die von Herrn *Hilbert* und dem Verfasser allgemein für die

*) *H. Weber*, Theorie der *Abel*schen Zahlkörper, Acta mathem. und Lehrbuch der Algebra, Braunschweig 1896, Bd. II, S. 719—741 (§ 197— § 201).

relativ zyklischen Körper vom Primzahlrelativgrad angegeben und bewiesen sind. Wir beweisen von ihnen aus zunächst den folgenden Satz, der auch für sich von Interesse ist:

Ist die Klassenzahl des Körpers der $l^\varkappa$-ten Einheitswurzeln zu l prim, so ist jede Einheit dieses Körpers die Relativnorm einer Einheit des Körpers der $l^{\varkappa+1}$-ten Einheitswurzeln.

Der Grad des Körpers k der $l^\varkappa$-ten Einheitswurzeln ist $l^{\varkappa-1}(l-1)$; da k nebst allen konjugierten Körpern imaginär ist, so folgt, daß $\frac{l^{\varkappa-1}(l-1)}{2}-1$ Grundeinheiten in k existieren. Nimmt man zu diesen eine primitive $l^\varkappa$-te Einheitswurzel $\zeta_\varkappa$ hinzu, so ergibt sich, daß $l'=\frac{l^{\varkappa-1}(l-1)}{2}$ unabhängige Einheitenverbände in k existieren und daß daher die Anzahl sämtlicher Einheitenverbände in k (für den Exponenten l) gleich $l^{l'}$ ist. Ferner gibt es im Körper K der $l^{\varkappa+1}$-ten Einheitswurzeln l' relative Grundeinheiten in bezug auf k. Nennt man diese $H_1, H_2, \ldots H_{l'}$ und bezeichnet eine erzeugende Substitution der Relativgruppe von K bezüglich k mit S, so kann eine Einheit von der Gestalt:

$$(1.) \qquad H_1^{F_1(S)} \ldots H_{l'}^{F_{l'}(S)} \zeta_{\varkappa+1}^{e} \eta$$

nur dann die symbolische $(S-1)$-te Potenz einer Einheit aus K sein, wenn

$$(2.) \qquad F_1(1) \equiv F_2(1) \equiv \cdots \equiv F_{l'}(1) \equiv e \equiv 0 \ (l)$$

ist. Dabei bedeuten die Funktionen F ganze ganzzahlige Funktionen von S, $\zeta_{\varkappa+1}$ eine primitive $l^{\varkappa+1}$-te Einheitswurzel und η eine beliebige Einheit aus k. Aus dem Fundamentaltheorem des Herrn *Hilbert**) über die relativen Grundeinheiten folgt nämlich bei den angegebenen Annahmen, daß

$$F_1(1) \equiv F_2(1) \equiv \cdots \equiv F_{l'}(1) \equiv 0 \ (l)$$

sein muß. Soll aber die Relativnorm von $\zeta_{\varkappa+1}^{e}\eta$ bezüglich k, die gleich $\zeta_\varkappa^{e}\eta^{l}$ ist, gleich 1 sein, so muß auch $e \equiv 0 \ (l)$ sein.

Auf Grund der angegebenen Eigenschaft der relativen Grundeinheiten schließt man leicht, daß unter den Einheitenverbänden in K:

$$(3.) \qquad H_1^{e_1} \ldots H_{l'}^{e_{l'}} \zeta_{k+1}^{e} H^{l} \qquad (e_i, e = 0, 1, \ldots l-1)$$

höchstens l^1 sind, die Einheiten mit der Relativnorm 1 bezüglich k enthalten. Sind nämlich H' und H'' zwei solche Einheiten aus (3.), die nicht l-te Potenzen von Einheiten sind, so muß gelten:

---

*) *D. Hilbert*, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, S. 273, § 55, Satz 91.

(4.) $$H' = A^{S-1},\ H'' = B^{(S-1)}$$

wo A und B Zahlen aus K sind. Da nun das einzige ambige Primideal in K das Ideal $L = (\Lambda) = (1-\zeta_{\varkappa+1})$ ist, so folgt aus (4.), daß die Ideale (A) und (B) Produkte aus Idealen von k mit Potenzen von L sind. Wir haben demnach für (A) und (B) die Darstellungen:

(5.) $$A = \alpha \Lambda^m H_a,\ B = \beta \Lambda^n H_b,$$

wo H_a und H_b Einheiten aus K, m und n zwei zu l prime Exponenten und α, β Zahlen aus k sind. Daß die letzten beiden Größen nicht bloß Ideale, sondern Zahlen aus k sind, erkennt man, wenn man von den Gleichungen (5.) die Relativnorm bezüglich k bildet und beachtet, daß die Klassenzahl von k zu l prim vorausgesetzt ist. Die Exponenten m und n müssen zu l prim sein, weil anderenfalls H' oder H'' symbolische $(S-1)$-te Potenzen von Einheiten aus K sein würden. Aus (5.) schließt man nun, daß $A^n B^{-m}$ als Produkt einer Zahl aus k mit einer Einheit aus K darstellbar ist. Demnach ist $H'^n H''^{-m}$ eine Einheit des Systems (3.), die $(S-1)$-te Potenz einer Einheit und folglich l-te Potenz einer Einheit ist, wie aus dem vorhergehenden folgt. Da m und n zu l prim sind, hat man hiernach für H'' eine Darstellung:

$$H'' = H'^f \overline{H}^l,$$

wo f ein zu l primer Exponent ist und $\overline{H}$ eine Einheit aus K bedeutet. Daraus folgt, daß in der Tat höchstens l^l Einheitenverbände aus (3.) Einheiten mit der Relativnorm 1 in bezug auf k enthalten können.

Bildet man nun die Relativnormen der Einheiten des Systems (3.) bezüglich k, so folgt aus dem Vorstehenden, daß diese Relativnormen in k sicher $l^{l'}$ verschiedene Einheitenverbände bilden. Da mehr Verbände in k nicht existieren, so ist damit unser Satz bewiesen.

Wir können jetzt leicht die folgende Tatsache feststellen, aus der dann sofort der eine Teil des zu beweisenden Hauptsatzes folgt:

Ist J ein Ideal aus K und gilt

(6.) $$J^{S-1} \sim j,$$

wo j ein Ideal aus k bedeutet, so ist auch J einem Ideal aus k äquivalent. Aus (6.) folgt nämlich durch Bildung der Relativnorm bezüglich k

(7.) $$j^l \sim 1 \text{ in } k.$$

Da die Klassenzahl von k zu l prim vorausgesetzt wird, folgt aus (7.), daß j in k in der Hauptklasse liegt. Man kann daher

(8.) $$J^{S-1} = (M)$$

setzen, wo M eine Zahl aus K bedeutet, deren Relativnorm bezüglich k eine Einheit η in k ist. Ist M selbst eine Einheit in K, so ist J das Produkt eines Ideals aus k mit einer Potenz des ambigen Primideals $\mathfrak{A}$ in K und demnach einem Ideal aus k äquivalent. Ist aber M eine gebrochene Zahl, so ist η nach dem bewiesenen Satze auch Relativnorm einer Einheit H aus K und demnach

(9.) $$M = HN^{S-1},$$

wo N eine Zahl aus K bedeutet. Aus (8.) und (9.) folgt dann, daß JN^{-1} das Produkt aus einem Ideal in k mit einer Potenz von $\mathfrak{A}$ ist, und demnach ist wiederum J einem Ideal aus k äquivalent.

Um nunmehr unseren Hauptsatz zu beweisen, beachte man zunächst, daß, wenn J ein beliebiges Ideal aus K bedeutet, man stets einen zu l primen Exponenten q so bestimmen kann, daß J^q einem Ideal aus k äquivalent wird. Denn zunächst kann man es sicher erreichen, daß ein Ausdruck $J^{q(1-S)^i}$ einem Ideal aus k äquivalent wird, weil die $(S-1)^l$-te symbolische Potenz eines Ideals auch immer eine wirkliche l-te Potenz eines Ideals ist. Aus dem eben Bewiesenen folgt dann aber, daß J^q selbst einem Ideal aus k äquivalent ist. Verbindet man hiermit die Tatsache, daß nach Voraussetzung die Klassenzahl von k zu l prim ist, so folgt, daß auch die Klassenzahl von K zu l prim ist.

Setzt man umgekehrt voraus, daß die Klassenzahl des Körpers k durch l teilbar ist, so ist notwendig auch die des Körpers K durch l teilbar, wie unmittelbar aus einem vom Verfasser bewiesenen Theorem*) folgt. Hiermit ist der zu Anfang aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

---

*) *Ph. Furtwängler*, über die Klassenzahlen *Abel*scher Zahlkörper, dieses Journal, Bd. 134 (1908), S. 91.

Zur *Jacobi*schen Erzeugung der Flächen 2. Grades.

Von Herrn *Rudolf Sturm* in Breslau.

Diese Erzeugung ist folgende:

Es sind in zwei Räumen Σ, Σ' je drei Punkte gegeben A, A_1, A_2; B', B_1', B_2'; durch einen Punkt X' von Σ' werden die Kugeln um B', B_1', B_2' gelegt, darauf um A, A_1, A_2 bzw. die gleichen Kugeln und in X, $\overline{X}$ geschnitten. Diese Punkte $X, \overline{X}$ beschreiben eine Fläche 2. Grades, wenn X' eine Ebene durchläuft).*

Die Ebene Ω der drei Punkte A, A_1, A_2 ist für diese Fläche Hauptebene.

Der interessanteste, aber auch wichtigste Fall ist der, wenn *die von X' durchlaufene Ebene die Verbindungsebene Φ' der Punkte B', B_1', B_2' ist;* in ihm liegen die Punkte A, A_1, A_2 auf der Fokalkurve der erzeugten Fläche Φ^2 in der Hauptebene Ω. Auf diesen Spezialfall haben sich, während *Jacobi* und *Hermes* doch schon auf den allgemeineren Fall eingehen (Bd. 73, S. 202, 237), *Schröter* in seinem Buche über die Flächen 2. Ordnung (1880), § 67, S. 640 und neuerdings wiederum Herr *O. Staude* in seinem Werke: Analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche 2. Ordnung (1910), § 129, S. 716—718, beschränkt.

Einen einfachen Beweis für den *allgemeinen* Fall: beliebige Lage der von X' durchlaufenen Ebene, habe ich in diesem Journal Bd. 122, S. 263 gegeben und ihn nun im Bd. IV meiner „Lehre von den geometrischen Verwandtschaften“ (1909), § 142 etwas ausführlicher repro-

*) Dieses Journal Bd. 12, S. 137 und Gesammelte Werke von *Jacobi*, Bd. 7, S. 7, 42; vgl. auch *Jacobi*, *Joachimsthal* und *O. Hermes*, dieses Journal Bd. 73, S. 179, 207, 209.

duziert*), weil es sich bei dieser Erzeugung um eine höhere Verwandtschaft handelt: eine zweizweideutige Verwandtschaft der Punkte der Räume Σ, Σ', oder besser, eine eindeutige Verwandtschaft $\mathfrak{T}$ von Punktepaaren. Die Punkte $X, \overline{X}$, in denen irgend drei Kugeln um A, A_1, A_2 sich schneiden, und diejenigen $X', \overline{X}'$, in denen es die gleichen Kugeln um B', B_1', B_2' tun, bilden zwei zugeordnete Paare. Die Ebenen Ω, Φ' sind ersichtlich Symmetrieebenen der beiden Figuren**) und enthalten die Paare mit vereinigten Punkten.

Den Beweis, daß einer Gerade des einen Raumes ein Kegelschnitt im andern korrespondiert, dessen Ebene auf der Symmetrieebene senkrecht steht und der seine eine Achse in ihr hat, wiederhole ich hier nicht nochmals; aus diesem Satz folgt dann, daß einer Ebene eine Fläche 2. Grades entspricht.

Es läßt sich sofort erkennen, *daß, wenn die Ebene, etwa* E' *in* Σ', *durch einen der Punkte* B', B_1', B_2' *geht, der entsprechende* A *auf der Fokalkurve der Fläche 2. Grades in* Ω *liegt.*

Zwei gleiche Kugeln um A und B' schneiden die Fläche und die Ebene in einer Raumkurve 4. Ordnung und einem Kreise, die einander entsprechen; dies gilt insbesondere für die isotropen Kegel aus A und B', Nullkugeln oder „Kugelkegel", wie sie Herr *Staude* nennt. Geht E' durch B', so zerfällt der Kreis, der aus dem isotropen Kegel geschnitten wird, in zwei Geraden, die Raumkurve 4. Ordnung also in zwei Kegelschnitte, und in deren beiden Schnittpunkten wird die Fläche 2. Grades von dem isotropen Kegel aus A berührt, ihr Berührungskegel aus A demzufolge längs der beiden Kanten, die nach den Punkten gehen; also ist er Rotationskegel, und, infolge der Eigenschaften der Fokalkurven, muß A auf der in Ω befindlichen Fokalkurve liegen.

Wenn daher E' die Ebene Φ' ist, so liegen alle drei Punkte A auf der Fokalkurve.

An der genannten Stelle der „Verwandtschaften" ist weiter gezeigt, daß die beiden Kugelgebüsche (Ω) und (Φ'), deren Kugeln ihre Mittelpunkte in den Ebenen Ω, Φ' haben, welche dann die zu Ebenen abge-

*) Statt B, B_1, B_2 dort schreibe ich jetzt: B', B_1', B_2'.

**) Diese Symmetrien sind die zur Verwandtschaft $\mathfrak{T}$ gehörigen involutorischen Verwandtschaften der verbundenen Punkte in Σ, bzw. Σ'.

flachten Orthogonalkugeln darstellen, kollinear sind, derartig, daß zwei entsprechende Netze dieser Gebüsche zu Grundpunkte-Paaren entsprechende Paare aus der obigen Verwandtschaft $\mathfrak{T}$ haben. Eigentlichen Kugeln entsprechen eigentliche, solchen, die in die unendlich ferne Ebene und eine dann zur Symmetrieebene senkrechte Ebene zerfallen, ebenso beschaffene. Die unendlich ferne Ebene, doppelt, — Kugel S_0 — gehört zu beiden Gebüschen und entspricht sich selbst. Es gibt zweierlei Büschel in jedem der beiden Gebüsche: allgemeine, deren Mittelpunkte eine in Ω, bzw. Φ' liegende Zentrale erfüllen, mit einem Ebenenpaare der ersteren Art, und spezielle, deren Kugeln sämtlich denselben Mittelpunkt haben und zu denen allen die Kugel S_0 gehört. Von diesem gemeinsamen „Scheitelelement" ausstrahlend, erfüllen diese Büschel das Gebüsche. In der Kollineation entspricht einem allgemeinen Büschel ein allgemeiner, einem speziellen ein spezieller; und die Mittelpunkte entsprechender spezieller korrespondieren in der Affinität:

$$(A, B') \qquad \begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B' & B_1' & B_2' \end{vmatrix}$$

der Felder Ω, Φ'.

Daran seien nun weitere Betrachtungen angeknüpft. Wir suchen nach *gleichen entsprechenden Kugeln.* In einem allgemeinen Büschel $\mathfrak{B}$ von (Ω) ordnen wir zwei Kugeln einander zu, von denen die eine einer Kugel im entsprechenden Büschel $\mathfrak{B}'$ korrespondiert, die andere dieser gleich ist. Eine Kugel S aus $\mathfrak{B}$ hat eine entsprechende in $\mathfrak{B}'$, diese zwei (eventuell imaginäre) gleiche S_1 in $\mathfrak{B}$; eine S_1 aus $\mathfrak{B}$ hat zwei gleiche in $\mathfrak{B}'$, denen zwei Kugeln S in $\mathfrak{B}$ entsprechen. Wir haben es also mit einer Korrespondenz $[2, 2]$ in $\mathfrak{B}$ zu tun. Ist insbesondere S die zerfallende oder unendlich große Kugel, so ist die entsprechende die ebenso beschaffene in $\mathfrak{B}'$, und die dieser gleichen S_1 vereinigen sich in S; und ebenso, wenn wir von jener Kugel als S_1 ausgehen, fallen die beiden entsprechenden S wieder in ihr zusammen. Vereinigt sich aber in einer Korrespondenz $[m, n]$ in einander liegender Gebilde ein Element mit zwei von den n in dem einen Sinne und zugleich mit zwei von den m in dem andern Sinne entsprechenden, so zählt es als Koinzidenz (sich selbst entsprechendes Element) doppelt*).

*) Verwandtschaften, Bd. I, Nr. 187. Das ist ein Kennzeichen für Zweifachheit, das nicht notwendig eintreffen muß, aber, nach meiner Erfahrung, ziemlich oft eintrifft.

Die ausgearteten Kugeln sind daher solche, wie wir sie suchen; in jedem Büschel gibt es aber noch zwei andere.

Die eigentlichen Kugeln, welche ihren entsprechenden gleich sind, bilden in jedem der beiden Gebüsche ein zweifach unendliches System, von dem in jedem Büschel sich zwei befinden.

Wird daher das Gebüsche kollinear in den Punktraum abgebildet, die Kugeln, Büschel, Netze in die Punkte, Geraden, Ebenen, so entspricht diesem Kugelsystem eine Punktfläche 2. Ordnung.

Entsprechende Paare von Netz-Grundpunkten in der Kollineation waren entsprechende Paare der obigen Verwandtschaft $\mathfrak{T}$; das eine Paar besteht aber immer aus den Schnittpunkten von drei Kugeln um A, A_1, A_2, das andere aus denen der gleichen Kugeln um B', B_1', B_2'. Das bedeutet, daß die gleichen Kugeln der Büschel um A und B', A_1 und B_1', A_2 und B_2' in der Kollineation entsprechend sind. Wir haben so zunächst in jedem der beiden Gebüsche drei Büschel, welche ganz zu jenem Kugelsystem gehören, und die drei Bildgeraden liegen ganz auf der Fläche 2. Ordnung und gehen durch den Punkt, in den sich die allen diesen Büscheln gemeinsame Kugel S_0, als Element des betreffenden Gebüsches, abbildet. Die Bildfläche ist dabei ein Kegel 2. Ordnung; und die weiteren durch die Spitze gehenden Geraden derselben lehren, daß *das Gebüsche ∞^1 spezielle Büschel konzentrischer Kugeln besitzt, welche sämtlich den entsprechenden gleich sind.* Der Kegel zeigt weiter, daß in den andern speziellen Büscheln keine eigentliche Kugel ihrer entsprechenden gleich ist.

Eine Gerade in der zugehörigen Symmetrieebene, etwa Ω, ist Zentrale für ein Netz von Kugeln aus (Ω), zu dem S_0 gehört, und für alle allgemeinen Büschel desselben; die zwei Kugeln des Kugelsystems, die irgendeinem dieser Büschel angehören, führen zu zwei von jenen speziellen Büscheln, welche ihre Mittelpunkte auf ihr haben.

Die Mittelpunkte jener speziellen Büschel von (Ω), deren Kugeln den entsprechenden gleich sind, erzeugen in Ω einen Kegelschnitt (A), welcher durch A, A_1, A_2 geht; ihm entspricht, in der Affinität (A, B'), ein Kegelschnitt (B') in Φ', der durch B', B_1', B_2' geht und durch die Mittelpunkte dieser gleichen Kugeln in (Φ') erzeugt wird.

An Stelle der beiden Tripel A, A_1, A_2; B', B_1', B_2' können also beliebige drei Punkte von (A) und ihre entsprechenden auf (B') treten.

Auf der Fläche 2. Ordnung Φ^2, welche der Ebene Φ' entspricht, ist daher (A) *Fokalkurve,* und ebenso (B') auf der der Ebene Ω entsprechenden Ω'^2.

Mit der Verwandtschaft $\mathfrak{T}$ ist, wie ebenfalls in meinem Buche bewiesen wurde, noch eine zweite Affinität der Felder Ω und Φ' verbunden, — die dort zuerst erwähnte —, welche uns zur Herstellung der *Hauptkurven* der Flächen Φ^2, Ω'^2 in Ω bzw. Φ' führen wird. Diese Hauptkurven sind einander entsprechend in $\mathfrak{T}$, und zwar haben in zwei korrespondierenden Punkten sich je die Punkte zweier entsprechender Punktpaare vereinigt: in dem einen berühren sich Kugeln aus A, A_1, A_2 oder vielmehr aus allen Punkten von (A), im andern die gleichen Kugeln je aus dem entsprechenden Punkte von (B').

Die Verbindungslinien n, n' der Punkte entsprechender Paare von $\mathfrak{T}$, auf Ω, bzw. Φ' normal, tragen nicht bloß je ein Paar, sondern eine Involution solcher Paare, welche gleichseitig hyperbolisch und zur andern projektiv ist. Die Fußpunkte F, F', die endlichen Doppelpunkte dieser Involutionen, sind in der genannten Affinität entsprechend, welche deshalb (F, F') heiße und von der obigen (A, B') verschieden ist; in ihr sind A und $B', \ldots$ nicht entsprechend. In dieser Affinität sind auch entsprechend, weil mit entsprechenden Punkten F, F' erfüllt, die Spurlinien von zwei zu Ω, bzw. Φ' senkrechten Ebenen ν, ν', welche zu ausgearteten entsprechenden Kugeln der obigen Kollineation der Gebüsche (Ω), (Φ') gehören; die Geraden der einen von zwei solchen Ebenen haben ihren entsprechenden Kegelschnitt, von denen jeder zu zwei symmetrischen Geraden gehört, in der andern.

Wenn nun $X' \equiv F'$ die Ebene Φ' durchläuft, so haben wir die drei je in ihm sich schneidenden Kugeln und Kreise um B', B_1', B_2'; die entsprechenden Punkte $X, \overline{X}$, Schnitte der drei gleichen Kugeln um A, A_1, A_2, erzeugen die Fläche Φ^2; die Verbindungslinie $n = X\overline{X}$ ist die Potenzlinie dieser Kugeln und der Fußpunkt F der Potenzpunkt ihrer drei Kreise in Ω. X und $\overline{X}$ sind reell oder imaginär, je nachdem F innerer oder äußerer Potenzpunkt ist; wird F gemeinsamer Punkt der Kugeln und Kreise, so vereinigen sich X und $\overline{X}$ in ihm, und er ist Punkt der Hauptkurve von Φ^2 in Ω.

Wir legen die Affinität (F, F') durch drei Paare entsprechender Punkte fest; nun ergeben sich die dem Punkte $X' \equiv F'$ entsprechenden

Punkte $X, \overline{X}$ einfacher als Schnitte des Lotes in F auf Ω mit der Kugel um A, die der durch F' gehenden um B' gleich ist. Läuft F' auf einem Kreise um B', so beschreibt F eine Ellipse E; wird diese mit dem gleichen Kreise um A geschnitten, so vereinigen sich in einem Schnittpunkte P die Schnitte der zugehörigen Kugel mit dem Lote n in P; wir haben einen Punkt der Hauptkurve. Verändert sich jener Kreis um B', so durchläuft E einen Büschel konzentrischer ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen, und die Schnittpunkte einer jeden je mit dem entsprechenden gleichen Kreise um A erzeugen die Hauptkurve, die Schnittkurven der geraden Zylinder über den E mit den Kugeln über den Kreisen die Fläche Φ^2.

Die beiden projektiven Flächenbüschel bewirken zunächst auf einer Gerade eine Korrespondenz [2, 2], und zwar eine Projektivität zweier Involutionen; aber vom unendlich fernen Punkte läßt sich wiederum erkennen, daß er sowohl mit den einen zwei, als mit den andern zwei entsprechenden Punkten sich vereinigt, also doppelte Koinzidenz ist, so daß vom eigentlichen Erzeugnisse 4. Ordnung die doppelte unendlich ferne Ebene sich ablöst.

Der gemeinsame Mittelpunkt der Ellipsen E in Ω, dem B' in der Affinität (F, F') entsprechend, heiße B. Die Kreise um A (und B) und die Ellipsen E wachsen, wie die Affinität lehrt, gleichzeitig; der Nullkreis und die Nullellipse liegen außereinander; dies bleibt zunächst bestehen, aber da sie aufeinander zuwachsen, so muß reelles Schneiden eintreten.

Der Hauptschnitt der Fläche Φ^2 in Ω und sie selbst sind stets reell.

Wir können für ihn noch eine zweite Entstehungsweise gewinnen, aus welcher wir ein Kennzeichen erhalten werden, wann er Ellipse oder Hyperbel ist. Wenn P ein Schnittpunkt einer Ellipse E um B und des entsprechenden Kreises um A ist, so haben der Halbmesser BP und der Radius AP (oder der ihm gleiche dem BP in der Affinität entsprechende des Kreises um B') das Verhältnis, das in der Affinität den Strecken auf den Geraden von der Richtung BP in Ω und den ihnen entsprechenden in Φ' zukommt. Andererseits liegt P auf dem Kreise, dessen Punkte dieses Verhältnis zum Verhältnis der Entfernungen von B und A haben. Wir haben also jede Gerade durch B mit dem ihr so zugehörigen Kreise zu schneiden. Aber jedes Verhältnis kommt zwei Geraden aus B zu, und diese sind gepaart in einer Involution, von welcher die beiden rechtwinkligen Geraden s, t durch B, denen in der Affinität (F, F') wiederum recht-

winklige Geraden entsprechen, also die gemeinsamen Achsen der Ellipsen E, die Doppelstrahlen sind*). Die Kreise andererseits, die zu den verschiedenen Verhältnissen gehören, bilden einen Büschel, zu welchem die Paare der isotropen Strahlen aus B und A gehören, bei den Verhältniswerten 0 und ∞ sich ergebend. Es liegt also projektive Beziehung eines Kreisbüschels zu einer Involution vor; vom Erzeugnis 4. Ordnung zweigt sich das Paar der isotropen Strahlen aus B ab. Auch hier kann man sich überzeugen, daß es Strahlen aus B geben muß, welche den entsprechenden Kreis reell schneiden, daß also die erzeugte Kurve reell ist.

Nun gibt es bekanntlich zweierlei Affinitäten: mit reellen entsprechenden Geraden, welche gleiche Punktreihen tragen, und ohne solche. Für ein Verhältnis, das von 1 verschieden ist, ist der Kreis endlich; im zweiten Falle muß also eine Ellipse entstehen. Dem Verhältnis 1 gehört ein Kreis zu, der aus der Mittelsenkrechten auf BA und der unendlich fernen Gerade besteht. Die Schnitte dieser mit den beiden Geraden aus B, denen im ersteren Falle das Verhältnis 1 zukommt, sind die unendlich fernen Punkte der Kurve.

Der Hauptschnitt von Φ^2 (oder Ω'^2) in Ω (oder Φ'), der stets reell ist, ist Hyperbel oder Ellipse, je nachdem die Affinität (F, F') reelle oder imaginäre entsprechende Geraden mit gleichen Punktreihen hat.

Die reellen oder imaginären unendlich fernen Punkte liegen auf den derartigen Geraden g, g_1 aus B; da g, g_1 zu s, t harmonisch sind, so sind die Achsen des Hauptschnitts zu den Achsen der Ellipsen E parallel.

Die beiden Kreise, die bei den zu den Doppelstrahlen s, t gehörigen Verhältnissen sich ergeben, berühren die Kurve doppelt: mit s, t als Berührungssehne. Die Lote je aus dem Mittelpunkte auf s, t gehen durch die Berührungspole und durch die Mitten der Berührungssehnen, begegnen sich also im Mittelpunkte des Hauptschnitts.

Wir fanden, daß, nur wenn F innerer Potenzpunkt der drei Kreise um A, A_1, A_2 (oder ein gemeinsamer Punkt) ist, die den durch F' gehenden Kreisen um B', B_1', B_2' gleich sind, das die Fläche 2. Ordnung erzeugende Punktepaar $X\overline{X}$, das dem $X' \equiv F'$ entspricht, reell ist. Die Lote in A, A_1 oder A_2 schneiden die Kugeln immer reell; also *sind diese*

*) Vgl. hierzu: Verwandtschaften, Bd. II, Nr. 284.

drei Punkte A innere Potenzpunkte und ebenso die weiteren Punkte der Fokalkurve (A).

Die Hauptkurve bildet den Übergang von den inneren zu den äußeren Potenzpunkten.

Sie sei eine *Ellipse* und ihre innern Punkte seien die inneren Potenzpunkte; da die Lote in diesen die Fläche Φ^2 reell schneiden, so ist dieselbe ein *Ellipsoid.* Die Fokalkurve, durch innere Potenzpunkte gebildet, liegt ganz im Innern des Hauptschnitts, also ist sie die Fokalellipse.

Die Hauptebene Ω ist daher diejenige der Fokalellipse oder der größten und der mittleren Achse.

Die äußeren Punkte der Hauptellipse seien innere Potenzpunkte; die Fläche Φ^2 ist ein *einmanteliges Hyperboloid,* das sich ja über dem äußeren Teile der Hauptellipse erhebt. Die Fokalellipse liegt außerhalb der Hauptellipse.

Die Hauptkurve sei *Hyperbel,* und wiederum seien die inneren Potenzpunkte die inneren Punkte der Hyperbel. Das fordert ein *zweimanteliges Hyperboloid* Φ^2. Gilt für die Halbachsen-Quadrate: $a^2 > -b^2 > -c^2$, so liegen in der Ebene (a, c) gleichartige Haupt- und Fokalkurven, beide Hyperbeln, und die Fokalhyperbel innerhalb der Haupthyperbel. Diese Ebene ist also die Ω.

Sind aber die äußeren Punkte der Haupthyperbel innere Potenzpunkte, so handelt es sich wiederum um ein *einmanteliges Hyperboloid* Φ^2 und, wenn $a^2 > b^2 > -c^2$, haben wir es auch hier mit der Ebene (a, c) zu tun, in der die Fokalhyperbel im Äußeren der Haupthyperbel liegt*).

In der Ebene Ω liegen also ein reeller Hauptschnitt und eine reelle Fokalkurve, welche keine reellen Punkte gemeinsam haben.

Oder:

Ω ist die Hauptebene der Fläche Φ^2 mit derjenigen reellen Fokalkurve, welche in der Schaar der zu Φ^2 konfokalen Flächen mit Φ^2 gleichartig ist. Die Fokalellipse ist gleichartig mit den Ellipsoiden und den einmanteligen Hyperboloiden, zwischen denen sie den Übergang bildet, die

*) Interessante Sätze finden sich bei *Jacobi* (Dieses Journal, Bd. 73, S. 201) über die Art der Fläche Φ^2, je nach der Beschaffenheit der Dreiecke $A\,A_1\,A_2$, $B'\,B_1'\,B_2'$; z. B.: Φ^2 ist ein einmanteliges Hyperboloid, wenn eine Seite des zweiten Dreiecks oder alle drei kleiner sind als die entsprechenden im ersten.

Fokalhyperbel mit den einen und andern Hyperboloiden. Daher ergaben sich die einmanteligen zweimal*).

Einer Gerade der Fläche Φ^2 und der zu ihr in bezug auf Ω symmetrischen aus der andern Regelschar entspricht ein in Φ' gelegener Kegelschnitt, der aber andererseits in senkrechter Ebene zu Φ', in sich symmetrisch in bezug auf Φ' sein muß. Das wird zugleich nur durch eine doppelt zu rechnende Gerade in Φ' erfüllt. Durch einen Punkt X' von Φ' gehen so viele solcher Geraden, als symmetrische Geradenpaare auf Φ^2 durch $X, \overline{X}$, oder als Tangentialebenen durch $X\overline{X}$ gehen.

Die Geraden von Φ', denen je zwei symmetrische Geraden von Φ^2 korrespondieren, umhüllen einen Kegelschnitt; beiden Regelscharen entspricht derselbe Kegelschnitt.

Für die Betrachtung der Flächen E^2, welche den übrigen Ebenen E' von Σ' entsprechen, brauchen wir die Fläche Ω'^2. Dem Schnitte von E' mit Ω'^2 entspricht die Hauptkurve von E^2 in Ω.

Wenn E' die Ω'^2 berührt, also in zwei Geraden schneidet, so besteht diese Hauptkurve auch aus zwei Geraden; E^2 ist dann ein Kegel 2. Grades.

Den Tangentialebenen von Ω'^2 korrespondieren also Kegel 2. Grades.

Dem Berührungspunkt entspricht die Spitze des Kegels.

Einer Gerade auf E^2 muß ein in bezug auf Φ' symmetrischer Kegelschnitt entsprechen, von dem wenigstens ein Teil in E' liegt, also ein symmetrisches Geradenpaar, von dem eine Gerade sich in E' befindet. Den beiden Regelscharen auf E^2 entspricht wieder derselbe Kegelschnitt in E'.

Es ergeben sich so in Σ, Σ' zwei je in bezug auf Ω, Φ' symmetrische Komplexe 2. Grades T^2, T'^2 von der Beschaffenheit, daß zwei symmetrischen Geraden des einen zwei symmetrische Geraden des andern in $\mathfrak{T}$ entsprechen. Die Geraden dieser Komplexe sind zugleich die Geraden der Flächen 2. Ordnung des betreffenden Raumes, welche den Ebenen des andern zugeordnet sind.

---

*) Herr *Staude* benutzt, wie *Jacobi* a. a. O., die *Ivory*sche Affinität zwischen zwei gleichartigen konfokalen Flächen 2. Grades und *Ivory*s Satz, daß $PP_1' = P_1P'$ ist, wenn $P, P'; P_1, P_1'$ zwei Paare entsprechender Punkte auf solchen Flächen sind, nimmt die Ebene einer zur allgemeinen Fläche Φ^2 gleichartigen Fokalkurve als die andere Fläche und gelangt so zur *Jacobi*schen Erzeugung der Fläche Φ^2. Dabei liegen zunächst beide Tripel der A und der B' in der Hauptebene, die A auf der Fokal-, die B' auf der Hauptkurve; welche letzteren jedoch (kongruent) in eine andere Ebene verlegt werden können.

Diese Komplexe sind die Tangentenkomplexe der Flächen Φ^2 und Ω'^2.

In der Tat, einer Gerade g' entspricht in $\mathfrak{T}$ ein Kegelschnitt g^2, und seine Achsen-Endpunkte in Ω entsprechen den Schnitten von g' mit Ω'^2; bei einer Gerade g' aus T'^2 wird dieser Kegelschnitt ein Geradenpaar mit dem Doppelpunkte in Ω; in diesen fallen die Achsen-Endpunkte zusammen, g' berührt also Ω'^2.

Die Komplexkurve in einer Berührungsebene τ' von Ω'^2 ist ein doppelter Strahlenbüschel; denn, wenn X' in τ' liegt, so gehen durch das Lot $X\overline{X}$ an den τ' entsprechenden Kegel zwei vereinigte Tangentialebenen (im weiteren Sinne: Ebenen durch die Spitze), also durch X' zwei vereinigte Tangenten an die Komplexkurve; fällt insbesondere X' in den Berührungspunkt von τ', so fallen $X, \overline{X}$ in der Kegelspitze zusammen, und alle Ebenen durch das verbindende Lot sind Tangentialebenen des Kegels; der Berührungspunkt wird Scheitel *des doppelten Komplex-Strahlenbüschels.*

Jeder Komplexstrahl g, etwa von T'^2, muß, wegen der ∞^3 Flächen E^2, auf ∞^1 von ihnen als Gerade liegen; die zugehörigen Ebenen sind die durch die eine oder andere Gerade des ihm korrespondierenden symmetrischen Geradenpaars. Weil von diesen Ebenen zwei tangential an Ω'^2, zwei nach den einem Punkte P entsprechenden Punkten und je zwei tangential an den einer Gerade l entsprechenden Kegelschnitt oder an die einer Ebene π entsprechende Fläche gehen, so befinden sich in dem Flächensystem zwei Kegel, zwei Flächen gehen durch P und zwei berühren l oder π. Das gilt allgemein für einen Ebenenbüschel, wenn seine Achse außerhalb Φ' liegt, und das System der entsprechenden Flächen. Alle gehen durch den der Achse korrespondierenden Kegelschnitt.

Hat der Ebenenbüschel aber seine Achse e' in Φ', so führen zwei symmetrische Ebenen in ihm zu je derselben Fläche; das Flächensystem enthält nur einen Kegel und seine drei Charakteristiken sind nur 1*).

---

*) Hierbei mag die Behauptung auf S. 452 meines Buches, daß das dreifach unendliche System der Flächen E^2 alle zehn Charakteristiken gleich 8 hat, verbessert werden; diese Zahl ist zu halbieren; denn nehmen wir z. B. die Elementarbedingung (P, l, π), so haben das Punktpaar $P'\overline{P}'$, der Kegelschnitt l'^2, die Fläche π'^2 wohl acht gemeinsame Berührungsebenen, aber viermal zwei symmetrische, die also nur zu vier Flächen führen, und ebenso bei den andern Kombinationen von drei Elementarbedingungen.

Vorhin wie jetzt enthält es eine *Doppelebene*, die zu Ω senkrechte Ebene ν, welche der durch die Büschelachse gehenden zu Φ' normalen Ebene ν' entspricht: doppelt, weil jedes erzeugende Punktepaar zweimal sich ergibt: bei zwei symmetrischen Punkten in ν'. Die erwähnten Eigenschaften des Flächensystems, das zum Ebenenbüschel um eine in Φ' liegende Gerade e' gehört, weisen darauf hin, daß es sich um *den Büschel von Flächen 2. Grades handelt, die sich längs des in ν befindlichen Kegelschnitts e^2 berühren, welcher der e' entspricht.* Der Kegel des Systems entspricht den Ebenen aus e', welche Ω'^2 berühren, irgend eine Kante von ihm zwei symmetrischen Tangenten in ihnen mit dem Schnittpunkte auf e'. Eine beliebige Ebene schneidet diese in getrennten Punkten, die den Schnitten der Kante mit der der Ebene zugehörigen Fläche entsprechen. Eine Ebene durch e' schneidet sie in ihrem gemeinsamen Punkte, also in zwei zusammenfallenden Punkten; so daß die Kante die zugehörige Fläche auf e^2 berührt.

Dieser Büschel sich konisch berührender Flächen möge mit (e^2) bezeichnet werden.

Der Kegel, welcher dem Tangentialebenen-Paar von Ω'^2 aus einer Gerade e' von Φ' entspricht, ist Berührungskegel von Φ^2 aus einem Punkte von Ω; die Polare von e' in bezug auf Ω'^2 oder die Berührungssehne jener Ebenen ist jedenfalls reell; der ihrem Fußpunkte F' entsprechende F ist die Spitze des Kegels, also reell, mag jenes Paar aus reellen oder konjugiert imaginären Ebenen bestehen. Der Berührungs-Kegelschnitt e^2 liegt in der Ebene ν, die der Normalebene ν' über e' entspricht; ihre Spurlinie e in Ω entspricht der e in der Affinität (F, F'). *Je nachdem diese Kurve e^2 reell oder reell-imaginär*) ist, ist es auch der Kegel.* Wenn z. B. Φ^2 ein einmanteliges Hyperboloid ist, ist e^2 und der Kegel immer reell.

Die Geraden e, e', in denen die Normalebenen ν, ν' senkrecht stehen, sind entsprechend in (F, F'); ihre Pole F, F' in bezug auf die Hauptkurven sind es ebenfalls; also sind es auch diese Hauptkurven selbst. Und in der Tat, wenn e' die Hauptkurve von Ω'^2 tangiert, so fallen die Berührungsebenen in ν' zusammen, der Berührungskegel flacht sich in die Doppelebene ν ab, deren Spurlinie e dann die andere Hauptkurve berührt.

*) So bezeichne ich einen Kegelschnitt mit imaginären Punkten und Tangenten, der aber durch ein reelles Polarfeld (oder eine reelle Gleichung) definiert ist und dem konjugiert imaginäre Elemente zugleich angehören: ähnlich einen Kegel, eine Fläche 2. Grades, ein Paar von Punkten, ...

Ein beliebiger Büschel g' enthält zwei Ebenen, deren entsprechende Flächen E^2 die unendlich ferne Ebene berühren.

Diejenigen Paare symmetrischer Ebenen E', *denen Paraboloide entsprechen, umhüllen eine Fläche 2. Grades* Π'^2, *welche die Symmetrieebene* Φ' *zur Hauptebene hat.*

Ein Büschel (e^2) *enthält nur ein Paraboloid; dasselbe ist hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem der Kegelschnitt* e^2 *reelle unendlich ferne Punkte hat oder nicht.*

Denn die unendlich ferne Ebene schneidet in einem Kegelschnitt-Büschel mit reeller, imaginärer Doppel-Berührung, also mit einem reellen oder reell-imaginären Geradenpaare.

Wird e^2 eine Parabel, so fallen in jenem Kegelschnitt-Büschel die Berührungspunkte zusammen und das Geradenpaar mit der Doppelgerade, im Büschel (e) das Paraboloid mit der Doppelebene. Es handelt sich um diejenigen Normalebenen ν, welche die unendlich ferne Kurve von Φ^2 tangieren und Parabeln ausschneiden. Es sind die beiden Tangentialebenen des Asymptotenkegels von Φ^2, welche durch die auf Ω senkrechte Achse gehen, und ihre Parallelebenen. *Wenn* Φ^2 *ein Ellipsoid ist*, sind sie nicht reell; weil dann alle e^2 Ellipsen sind, *gibt es nur elliptische Paraboloide. Ferner, wenn* Φ^2 *ein einmanteliges Hyperboloid und* Ω *die Hauptebene* (a, b) *ist*, liegt die dritte Achse innerhalb des Asymptotenkegels; jene Ebenen sind nicht reell. Alle Ebenen ν schneiden Φ^2 in Hyperbeln; *es gibt nur hyperbolische Paraboloide.*

In den beiden anderen Fällen, daß Φ^2 ein zweimanteliges Hyperboloid ist oder ein einmanteliges mit Ω als Hauptebene (a, c), sind beide Paraboloide möglich.

Nun entsprechen jenen Ebenen ν, welche die unendlich ferne Kurve von Φ^2 berühren und uns die Übergangsform (mit zwei vereinigten unendlich fernen Geraden) zwischen den beiden Arten von Paraboloiden, mit denen wir es in unserem Flächensystem zu tun haben, darstellen, Ebenen ν', also zu Φ' normale Tangentialebenen der Fläche Π'^2, die daher auf deren Hauptkurve in Φ' berühren. Aber symmetrisch zu beiden Seiten berührende Ebenen liefern dasselbe Paraboloid. Wie können die auf der Hauptkurve tangierenden Ebenen den Übergang bilden? Beachten wir, daß sie Ebenenpaare mit vereinigten Ebenen darstellen, welche den Über-

gang bilden *von reellen Paaren von Berührungsebenen von* Π'^2 *aus Geraden* e' *von* Φ' *zu reell-imaginären. Sind diese Ebenen reell und infolge dessen beide Arten von Paaren von Berührungsebenen vorhanden, so führen die einen dieser Paare zu den einen, die andern zu den andern Paraboloiden*; in den verschiedenen Fällen wird dies verschiedenartig sein.

In den beiden obigen Fällen, in denen es nur eine Art von Paraboloiden gibt, hat Π'^2 in Φ' eine reell-imaginäre Hauptkurve und ist ein zweimanteliges Hyperboloid.

Kehren wir zum Flächenbüschel (e^2) zurück; um ihn vollständig zu erhalten, müssen wir den Büschel e' nicht nach einzelnen Ebenen durchlaufen, sondern nach den symmetrischen Ebenen*paaren*, den reellen und den reell-imaginären; die Doppelebenen Φ', ν' der hyperbolisch-gleichseitigen Involution bilden den Übergang. *Auch einem reell-imaginären Ebenenpaare kann eine reelle Fläche zugehören*, wie wir das schon für ein reell-imaginäres Tangentialebenen-Paar von Ω'^2 in einem Büschel e' gefunden haben.

Was die *Übergangsformen* anlangt, so führt das elliptische Paraboloid von Ellipsoiden zu zweimanteligen Hyperboloiden, während das hyperbolische innerhalb eines Kontinuums einmanteliger Hyperboloide vorkommt und daher weniger wichtig ist. Jeder unserer Büschel (e^2) enthält ein Paraboloid. Ferner bildet der reelle Kegel den Übergang von den einen zu den andern Hyperboloiden, der reell-imaginäre Kegel denjenigen von Ellipsoiden zu reell-imaginären Flächen, endlich, wie aus der Theorie der konfokalen Flächen 2. Grades bekannt ist, eine Doppelebene den Übergang von reell-imaginären Flächen zu Ellipsoiden, oder von diesen zu einmanteligen Hyperboloiden, oder von diesen zu zweimanteligen, oder endlich von diesen zu reell-imaginären Flächen.

Die Reihenfolge der verschiedenartigen Flächen in einem Büschel (e^2) soll nun ermittelt werden; dazu bezeichnen wir die Ellipsoide, die ein-, zweimanteligen Hyperboloide, die reell-imaginären Flächen, den reellen, reell-imaginären Kegel, das elliptische Paraboloid und die Doppelebene kürzer mit:

$$E, H_1, H_2, I;\ K_r, K_i, P_e, D.$$

E, H_1, H_2, I bezeichnen in den folgenden Tabellen Kontinuen von gleichartigen Flächen, K_r, K_i, P_e, D eine einzelne Übergangsfläche. Φ^2, mit der wir jede Reihenfolge anfangen und enden, ist nicht Übergangsfläche, sondern befindet sich innerhalb eines Kontinuums gleichartiger Flächen. Aber

Φ^2 und D, welche den Doppelebenen Φ' und ν' der Involution der symmetrischen Ebenenpaare im Büschel e' entsprechen, bilden die Übergänge zwischen *den beiden Reihen der Flächen von* (e^2), *welche den reellen und den reell-imaginären Ebenenpaaren entsprechen* und die wir getrennt, links und rechts, hinschreiben, D zwischen ihnen, Φ^2 am Anfang der einen und am Ende der andern Reihe.

Wir unterscheiden I, II, III, die Arten der stets reellen Fläche Φ^2, zweitens 1) und 2), je nachdem e^2 und der Kegel reell oder reell-imaginär ist, drittens α), β), je nachdem das Paar der Berührungsebenen aus e' an Ω'^2 reell oder reell-imaginär ist. Bei 2) muß das Paraboloid elliptisch sein.

I. Φ^2 *ist ein* H_1; e^2 ist immer reell; es ist nur 1) möglich. Ω ist (a,b) oder (a,c); im ersteren Falle gibt es keine elliptischen Paraboloide.

Wir haben folgende Reihenfolgen:

α) $\qquad \Phi^2 H_1 K_r H_2 P_e E \; D \; H_1 \Phi^2$

oder:

$$\Phi^2 H_1 K_r H_2 \; D \; \overline{H}_1 \Phi^2,$$

je nachdem ein P_e vorhanden ist oder nicht; im zweiten Fall ist dann $\overline{H}_1$ die Reihe der einmanteligen Hyperboloide, welche das hyperbolische Paraboloid enthält;

β) $\qquad \Phi^2 H_1 \; D \; E P_e H_2 K_r H_1 \Phi^2$

oder:

$$\Phi^2 \overline{H}_1 \; D \; H_2 K_r H_1 \Phi^2.$$

II. Φ^2 *ist ein* H_2; Ω ist (a,c):

1α) $\qquad \Phi^2 H_2 K_r H_1 \; D \; E P_e H_2 \Phi^2$

oder:

$$\Phi^2 H_2 K_r \overline{H}_1 \; D \; H_2 \Phi^2;$$

1β) $\qquad \Phi^2 H_2 P_e E \; D \; H_1 K_r H_2 \Phi^2$

oder:

$$\Phi^2 H_2 \; D \; \overline{H}_1 K_r H_2 \Phi^2;$$

2α) $\qquad \Phi^2 H_2 P_e E K_i I \; D \; H_2 \Phi^2;$

2β) $\qquad \Phi^2 H_2 \; D \; I K_i E P_e H_2 \Phi^2.$

III. Φ^2 *ist ein* E; Ω ist (a,b); das Paraboloid ist elliptisch:

1α) $\qquad \Phi^2 E P_e H_2 K_r H_1 \; D \; E \Phi^2;$

1β) $\qquad \Phi^2 E \; D \; H_1 K_r H_2 P_e E \Phi^2;$

$2\alpha)$ $\qquad \Phi^2 E K_i I D H_2 P_e E \Phi^2;$

$2\beta)$ $\qquad \Phi^2 E P_e H_2 D I K_i E \Phi^2.$

Liegt eine *reelle* Ebene E' vor, so wollen wir annehmen, daß die etwaigen reellen Berührungsebenen τ', η' aus ihrem Schnitte e' mit Φ' an Ω'^2, Π'^2 hergestellt seien; wir haben für E' festzustellen, in welchen der rechten Winkel $\Phi' \nu'$ und in welchen der eventuellen durch die in jenem liegenden τ', η' entstandenen Teilwinkel E' fällt, und können dann die Art der entsprechenden Fläche E^2 angeben.

Z. B. bei III $1\alpha)$ sind die τ', η' reell; der rechte Winkel $\Phi' \nu'$, in dem sich E' befindet, hat die Teilwinkel $\Phi' \eta', \eta' \tau', \tau' \nu'$ und je nachdem E' in den ersten, zweiten, dritten zu liegen kommt, ist die Fläche ein E, H_2 oder H_1. In $2\alpha)$ sind nur die τ', in $2\beta)$ nur die η' reell, in $1\beta)$ weder die einen noch die andern; wir haben dann nur zwei Teilwinkel oder den ganzen rechten.

Bei II $1\alpha)$ sind in beiden Fällen die τ' reell, im zweiten auch die η', aber sie gehören zu hyperbolischen Paraboloiden, also haben wir beidemal nur die Teilwinkel $\Phi' \tau', \tau' \nu'$. Usw.

Aber man darf sich eben nicht mit den reellen Ebenen E' begnügen.

Über algebraische Modulsysteme und lineare homogene partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Von Herrn *Ernst Fischer* in Brünn.

Vorbemerkungen.

Ist $f(x_1, \dots x_n)$ ein Polynom in $x_1, \dots x_n$ mit konstanten Koeffizienten, so ist ohne besondere Erklärung die Bedeutung des Ausdrucks

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u$$

verständlich, wofern u eine Funktion bedeutet, an welcher partielle Differentiationen unbeschränkt ausführbar und in ihrer Wirkung von der Reihenfolge unabhängig sind; z. B. für $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_1 x_2$ wird

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) u = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Statt $f(x_1, \dots x_n)$ und $f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ schreiben wir abkürzend $f(x)$ und $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Es ist ferner klar, wie man mit solchen Operatoren rechnen kann; ist z. B. noch $g(x) = x_1 x_2$ und $h(x) = x_2$, so hat man

$$\left[f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + 2h^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] u = 3\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 5\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Ist $f(x)$ ein Polynom in $x_1, \dots x_n$ mit konstanten Koeffizienten, so ist

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0 \tag{1.}$$

eine lineare homogene partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Aus ihrem Erfülltsein folgt, wenn $k(x)$ irgendein Polynom mit konstanten Koeffizienten bedeutet, daß auch

$$k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u\right]=0$$

ist, und man erkennt, indem man dies

einmal als $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u\right]=0$ und einmal als $\left[k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]u=0$

liest, die beiden Grundtatsachen:

a) Wenn u der Differentialgleichung (1.) genügt, so genügt ihr auch jede Funktion v des Typus $v=k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u$; wir nennen solche Funktionen v *Derivationen* von u. (Zu den Derivationen von u gehören hiernach auch u und Null.)

b) Wenn u der Differentialgleichung (1.) genügt, so genügt u auch jeder Differentialgleichung $g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$, in welcher $g(x)=k(x)f(x)$ irgendein durch $f(x)$ teilbares Polynom bedeutet.

Ist $f(x)$ ein homogenes Polynom mit konstanten Koeffizienten oder, wie wir fortan sagen, eine *Form*, so ist die Differentialgleichung (1.) von der Besonderheit, daß in ihren einzelnen Gliedern lauter gleich hohe Ableitungen stehen. Soll einer solchen Differentialgleichung ein unhomogenes Polynom genügen, so müssen die Formen verschiedener Dimension, als deren Summe sich das Polynom darstellt, einzeln ihr genügen.

Wir formulieren für diese besonderen Differentialgleichungen noch die weitere Grundtatsache:

c) Ist $f(x)$ eine Form von der Dimension m, und zieht man nur solche Funktionen u in Betracht, welche selbst Formen und zwar von der Dimension $m+\mu \geqq m$ sind, so ist für solche u die Differentialgleichung (1.) gleichbedeutend mit dem System

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0 \tag{2.}$$

von Differentialgleichungen, worin $F(x)$ alle durch $f(x)$ teilbaren Formen von der Dimension $m+\mu$ durchläuft.

In der Tat, aus (1.) folgt (2.) nach Grundtatsache b), und umgekehrt aus (2.) d. h., wenn $F(x)=k(x)f(x)$ gesetzt wird, aus $\left[k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]u=0$ folgt

$$k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u\right]=0,$$

worin, da $k(x)$ alle Formen von der Dimension μ durchläuft, das Ver-

schwinden aller einzelnen Koeffizienten der Form μ-ter Dimension $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u$ eingeschlossen ist, mithin das Bestehen von (1.).

Ist $\mathfrak{S}$ irgendeine Menge von Formen, so soll stets mit

$$\mathfrak{S}(p)$$

die Menge der Formen p-ter Dimension aus $\mathfrak{S}$ bezeichnet werden (einschließlich der Form Null, falls diese in $\mathfrak{S}$ vorkommt).

Ist $f(x)$ irgendeine Form, so soll stets unter

$$\bar{f}(x)$$

diejenige Form verstanden werden, welche aus $f(x)$ hervorgeht, indem man alle Koeffizienten durch ihre konjugiert-komplexen Werte ersetzt.

§ 1. Lineare Formenscharen*).

a) Eine Formenmenge $\mathfrak{L}$ wird eine *lineare Schar* genannt, wenn sie neben $\varphi(x)$ und für jede beliebige Konstante c stets auch $c\varphi(x)$ und neben $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ gleicher Dimension stets auch $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ enthält.

Wenn dabei eine Zahl q existiert derart, daß man in $\mathfrak{L}$ wohl ein System von q, aber kein System von $q+1$ linearunabhängigen**) Formen finden kann, so heißt $\mathfrak{L}$ eine *endliche* lineare Schar und q ihre *Stufenzahl*.

Ist $\mathfrak{L}$ eine beliebige lineare Schar, so ist $\mathfrak{L}(p)$ stets eine endliche.

Zwei lineare Scharen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von Formen einer bestimmten Dimension p heißen *komplementär*, wenn sich jede Form p-ter Dimension auf eine und nur eine Weise in die Summe einer Form aus $\mathfrak{A}$ und einer Form aus $\mathfrak{B}$ zerlegen läßt. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ keine Form außer der Form Null gemein haben und daß sich die Stufenzahlen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ergänzen zu der Stufenzahl der aus allen möglichen Formen p-ter Dimension bestehenden linearen Schar.

b) Es seien $f(x)$ und $\varphi(x)$ Formen derselben Dimension p und

$$f(x)=\sum a_{\varkappa_1\cdots\varkappa_n}\frac{x_1^{\varkappa_1}\cdots x_n^{\varkappa_n}}{\sqrt{\varkappa_1!\cdots\varkappa_n!}},\quad \varphi(x)=\sum a_{\varkappa_1\cdots\varkappa_n}\frac{x_1^{\varkappa_1}\cdots x_n^{\varkappa_n}}{\sqrt{\varkappa_1!\cdots\varkappa_n!}}. \qquad (\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n=p)$$

---

*) *Clebsch*, Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, Abhandl. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 17 (1872). *E. Schmidt*, Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Rend. del Circ. mat. di Palermo, 25 (1908).

**) Der Begriff der Linearunabhängigkeit von Formen $\varphi_1(x),\ldots\varphi_\nu(x)$ wird dabei in dem Sinne gebraucht, daß keine Gleichung $c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_\nu\varphi_\nu(x)=0$ mit nicht sämtlich verschwindenden Konstanten $c_1,\ldots c_\nu$ statthaben soll.

Dann ist

$$\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = \Sigma\, \bar{a}_{x_1 \ldots x_n}\, a_{x_1 \ldots x_n},$$

$$\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = \Sigma\, |a_{x_1 \ldots x_n}|^2.$$

Die Formen gleicher Dimension $f(x)$ und $\varphi(x)$ heißen zueinander *orthogonal*, wenn sie die beiden (völlig gleichbedeutenden) Relationen erfüllen:

$$\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0, \quad \bar{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = 0.$$

Ist für eine Form $f(x)$

$$\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = 0,$$

die Form also orthogonal zu sich selbst, so verschwindet sie identisch.

Ist $\mathfrak{A}$ eine lineare Schar von Formen p-ter Dimension und bildet man die Gesamtheit $\mathfrak{B}$ aller derjenigen Formen p-ter Dimension, welche zu jeder Form von $\mathfrak{A}$ orthogonal sind, so sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ komplementäre lineare Scharen.

Denn ihre Stufenzahlen ergänzen sich zu der Stufenzahl der aus allen möglichen Formen p-ter Dimension bestehenden Schar, und sie haben ferner wegen der unmittelbar vorangehenden Bemerkung gewiß keine von Null verschiedene Form gemein.

Dabei ist das Verhältnis ein gegenseitiges, indem wiederum $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit derjenigen Formen p-ter Dimension ist, die zu jeder Form von $\mathfrak{B}$ orthogonal sind.

Jede Form p-ter Dimension $f(x)$ besitzt also eine völlig bestimmte Zerlegung in die Summe

$$f(x) = \varphi(x) + F(x)$$

einer Form $F(x)$ aus $\mathfrak{A}$ und einer zu allen Formen von $\mathfrak{A}$ orthogonalen Form $\varphi(x)$. Diese Zerlegung kann auch durch die Forderung definiert werden, daß $F(x)$ zu $\mathfrak{A}$ gehören und

$$\bar{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = \Sigma\, |\alpha_{x_1 \ldots x_n}|^2$$

möglichst klein ausfallen soll. $\varphi(x)$ heiße der *Clebschsche Rest* von $f(x)$ nach $\mathfrak{A}$.

c) Diese Überlegungen sind einer Verallgemeinerung fähig, von der wir hauptsächlich in § 6 Gebrauch machen werden. Es sei nämlich eine lineare Schar $\mathfrak{C}$ von Formen p-ter Dimension gegeben; zwei lineare Scharen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von Formen aus $\mathfrak{C}$ heißen *komplementär in* $\mathfrak{C}$, wenn sich jede Form von $\mathfrak{C}$ auf eine und nur eine Weise in die Summe einer Form aus $\mathfrak{A}$ und einer Form aus $\mathfrak{B}$ zerlegen läßt; dazu ist notwendig und hin-

reichend, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ keine Form außer der Form Null gemein haben und daß sich die Stufenzahlen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ergänzen zu der Stufenzahl von $\mathfrak{C}$.

Ist $\mathfrak{C}$ eine lineare Schar von Formen p-ter Dimension, $\mathfrak{A}$ eine lineare Schar von Formen aus $\mathfrak{C}$ und bildet man die Gesamtheit $\mathfrak{B}$ aller derjenigen Formen aus $\mathfrak{C}$, welche zu jeder Form von $\mathfrak{A}$ orthogonal sind, so sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ lineare Scharen, welche komplementär in $\mathfrak{C}$ sind; dabei ist das Verhältnis ein gegenseitiges, indem wiederum $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit aller derjenigen Formen aus $\mathfrak{C}$ ist, die zu jeder Form von $\mathfrak{B}$ orthogonal sind.

Denn wenn die Form $f(x)$ zu $\mathfrak{C}$ gehört, so gehört ihr nach $\mathfrak{A}$ gebildeter *Clebsch*scher Rest $\varphi(x)$, als Differenz zwischen $f(x)$ und einer Form $F(x)$ aus $\mathfrak{A}$, ebenfalls zu $\mathfrak{C}$; folglich zu $\mathfrak{B}$.

§ 2. Der *Clebsch*sche Rest nach einem Modulsystem.

Es seien $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ gegebene Formen. Die Gesamtheit $\mathfrak{M}$ derjenigen Formen $F(x)$, welche sich durch geeignete Wahl von Formen $Q_1(x), \dots Q_\varkappa(x)$ in die Gestalt

$$F(x) = Q_1(x) f_1(x) + \cdots + Q_\varkappa(x) f_\varkappa(x)$$

bringen lassen, wird der aus $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ abgeleitete *Modul* genannt. Zwei Formen $f(x)$ und $\varphi(x)$, deren Differenz in $\mathfrak{M}$ liegt, heißen nach dem Modulsystem $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ *kongruent:*

$$f(x) \equiv \varphi(x) \quad \text{modd. } f_1(x), \dots f_\varkappa(x).$$

Danach verteilen sich alle möglichen Formen in Klassen von untereinander kongruenten, die Kongruenzklassen; nur die Form Null gehört mehr als einer Klasse an, nämlich allen Klassen $\mathfrak{M}(p)$. Alle Formen einer Kongruenzklasse haben gleiche Dimension.

Unter einem *Restsystem* nach $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ verstehen wir eine Formenmenge $\mathfrak{R}$, welche aus jeder Kongruenzklasse eine und nur eine Form enthält, oder, was dasselbe ist, eine Formenmenge $\mathfrak{R}$ von der Beschaffenheit, daß sich jede beliebige Form auf eine und nur eine Weise in die Summe einer Form von $\mathfrak{R}$ und einer Form von $\mathfrak{M}$ zerlegen läßt.

Ein Restsystem $\mathfrak{R}$, welches zugleich eine lineare Formenschar ist, nennen wir eine *Restschar* nach $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$. Ihr Vorzug vor anderen Restsystemen besteht*) darin, daß die zu der Form $c\,g(x)$, wo c eine Kon-

*) kurz gesagt in dem zwischen den Elementen von $\mathfrak{R}(p)$ und den Kongruenzklassen p-ter Dimension bestehenden Isomorphismus. — Die Bildung der Begriffe Kongruenzklasse, Restsystem, Restschar beruht nur auf der einen Eigenschaft des Moduls $\mathfrak{M}$ eine lineare Formenschar zu sein.

stante ist, kongruente Form von $\mathfrak{R}$ gerade $c\,\psi(x)$ ist, wenn $\psi(x)$ die zu $g(x)$ kongruente Form von $\mathfrak{R}$ bedeutet, und daß die zu $g_1(x)+g_2(x)$, wo $g_1(x)$ und $g_2(x)$ von gleicher Dimension sind, kongruente Form von $\mathfrak{R}$ gerade $\psi_1(x)+\psi_2(x)$ ist, wenn $\psi_1(x)$ die zu $g_1(x)$ und $\psi_2(x)$ die zu $g_2(x)$ kongruente Form von $\mathfrak{R}$ bedeutet; aus der Klasse $\mathfrak{M}(p)$ enthält $\mathfrak{R}$ gerade die Form Null.

Damit nun eine Formenmenge $\mathfrak{R}$ eine Restschar nach $f_1(x),\dots f_\varkappa(x)$ bildet, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{R}(p)$ und $\mathfrak{M}(p)$ für jede Dimension p komplementäre lineare Scharen sind. Daher liefert § 1 b ein Mittel, um eine Restschar zu konstruieren. Wir definieren nämlich diese spezielle Restschar M durch die Forderung, daß $\mathsf{M}(p)$ für jede Dimension p gerade die Gesamtheit derjenigen Formen $\varphi(x)$ der Dimension p sein soll, welche dem System von Differentialgleichungen

$$\overline{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0$$

genügen, worin $F(x)$ das System $\mathfrak{M}(p)$ durchläuft.

Nun ist aber dieses System von Differentialgleichungen zunächst mit dem folgenden gleichbedeutend:

$$\overline{F}_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0,$$

worin i die Zahlen $1,2,\dots\varkappa$ und $F_i(x)$ alle durch $f_i(x)$ teilbaren Formen p-ter Dimension durchläuft, und, da es sich nur um solche Lösungen $\varphi(x)$ handelt, welche Formen p-ter Dimension sind, nach Grundtatsache c) der Vorbemerkungen weiter gleichbedeutend mit dem System

$$f_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0,$$

worin i die Zahlen $1,2,\dots\varkappa$ durchläuft:

Theorem. *Die Gesamtheit* M *derjenigen Formen* $\varphi(x)$, *welche dem System von Differentialgleichungen*

$$\overline{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0,\ \dots\ \overline{f}_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0$$

genügen, bildet eine Restschar nach $f_1(x),\dots f_\varkappa(x)$.

Die zu einer beliebigen Form $f(x)$ kongruente Form aus M (also nach der Ausdrucksweise des § 1 den *Clebsch*schen Rest von $f(x)$ nach $\mathfrak{M}(p)$, wenn p die Dimension von $f(x)$ ist) nenne ich den *Clebschschen Rest* von $f(x)$ nach $f_1(x),\dots f_\varkappa(x)$.

Clebsch hat nämlich die Definition der „Normalform der Gleichung eines Linienkomplexes“ auf die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi(p)}{\partial p_{12}\partial p_{34}} + \frac{\partial^2 \varphi(p)}{\partial p_{13}\partial p_{42}} + \frac{\partial^2 \varphi(p)}{\partial p_{14}\partial p_{23}} = 0$$

gegründet, worin $p_{12}, \ldots$ die Linienkoordinaten bedeuten und also

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

ist. *Clebsch* hat aber a. a. O. auch die ebenen Gebilde der verschiedenen Stufen in mehrdimensionalen Räumen behandelt, und sein Beweis für Existenz und Eindeutigkeit der Normalform ist so angelegt, daß er sich auf das hier behandelte allgemeinere Problem übertragen ließ.

Andere bekannte Beispiele werden in § 4 aufgezählt werden.

§ 3. Sätze über Differentialgleichungen.

Dieser Paragraph steht mit dem Hauptgegenstande dieser Arbeit nur in losem Zusammenhange.

Unter „Differentialgleichung“ wird hier ausschließlich eine Gleichung $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ verstanden, worin $f(x)$ eine Form ist.

Satz 1. Damit die Differentialgleichung

(3.) $$g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

eine Folge des Systems von Differentialgleichungen

(4). $$f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \ \ldots f_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

ist (d. h. damit jede Lösung u von (4.) auch (3.) befriedigt), *ist notwendig und hinreichend das Bestehen der Kongruenz**)

(5.) $$g(x) \equiv 0 \quad \text{modd. } f_1(x), \ldots f_\varkappa(x).$$

Beweis. Nur die Notwendigkeit der Bedingung bedarf eines Beweises. Und zwar können wir (5.) schon aus der geringeren Annahme erschließen, daß alle diejenigen Lösungen von (4.), welche Formen $\psi(x)$ sind und dieselbe Dimension p besitzen wie $g(x)$, auch (3.) befriedigen.

---

*) Sie besagt, daß $g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u$ eine Summe von Derivationen der Ausdrücke $f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \ldots f_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u$ ist. Natürlich gibt es ähnliche Sätze für allgemeinere Differentialgleichungen.

Diese Formen $\psi(x)$ sind nämlich genau diejenigen, für welche $\overline{\psi}(x)$ zu $\mathsf{M}(p)$ gehört, wenn wir die Bezeichnungen des § 2 beibehalten. Die Annahme besagt also, daß $g(x)$ zu allen Formen von $\mathsf{M}(p)$ orthogonal ist. Daher gehört $g(x)$ zu $\mathfrak{M}(p)$.

Bemerkung. Für diesen Beweis ist im Grunde die für §§ 1 und 2 charakteristische Benutzung des Konjugiert-Komplexen entbehrlich. Die Formen $\psi(x)$ sind nämlich nach Grundtatsache c) der Vorbemerkungen genau diejenigen Formen p-ter Dimension, welche dem System von Differentialgleichungen

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)=0$$

genügen, worin $F(x)$ das System $\mathfrak{M}(p)$ durchläuft. Sie bilden eine lineare Schar $\mathfrak{L}$ von Formen p-ter Dimension, und es ist umgekehrt $\mathfrak{M}(p)$ genau die Gesamtheit derjenigen Formen $F(x)$ p-ter Dimension, welche dem System von Gleichungen

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)=0$$

genügen, worin $\psi(x)$ die lineare Schar $\mathfrak{L}$ durchläuft. Da $g(x)$ diesem System genügt, gehört $g(x)$ zu $\mathfrak{M}(p)$.

Man kann dabei nicht behaupten, daß $\mathfrak{M}(p)$ und $\mathfrak{L}$ komplementär wären; dies ist aber für den vorliegenden Zweck eben nicht erforderlich.

Satz 2. Damit das System von Differentialgleichungen

$$f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0, \quad \dots \quad f_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0 \tag{6.}$$

nur Polynome zu Lösungen hat und diese Polynome überdies in keiner Variablen den Grad μ erreichen, ist notwendig und hinreichend, daß die n Formen $x_1^\mu, \dots x_n^\mu$ sämtlich nach $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ kongruent Null sind.

Beweis. Die Forderung ist gleichbedeutend mit der anderen, daß jede der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^\mu u}{\partial x_1^\mu}=0, \quad \dots \quad \frac{\partial^\mu u}{\partial x_n^\mu}=0$$

eine Folge von (6.) sein soll. Daher folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 1.

Satz 3. Damit es eine solche positive ganze Zahl μ gibt, daß die Differentialgleichung

$$\left[g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^\mu u=0$$

eine Folge des Systems von Differentialgleichungen

$$f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0, \quad \dots \quad f_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

wird, ist notwendig und hinreichend, daß die algebraische Gleichung mit den Unbekannten $x_1, \dots x_n$

$$g(x)=0 \tag{7.}$$

eine Folge des Gleichungssystems

$$f_1(x)=0, \quad \dots f_\varkappa(x)=0 \tag{8.}$$

ist (d. h. daß jede Lösung von (8.) auch (7.) befriedigt).

Beweis. Nach Satz 1 ist zunächst notwendig und hinreichend die Existenz einer solchen positiven ganzen Zahl μ, daß

$$[g(x)]^\mu \equiv 0 \quad \text{modd. } f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$$

wird. Hierzu ist nun die im Satze 3 angegebene Bedingung natürlich notwendig: daß sie aber auch hinreicht, ist der Inhalt eines Satzes von *Hilbert**).

Satz 4. Damit das System von Differentialgleichungen

$$f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0, \quad \dots \quad f_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0 \tag{9.}$$

nur Polynome zu Lösungen hat und die Grade dieser Polynome überdies unter einer festen Grenze liegen, ist notwendig und hinreichend, daß das System von algebraischen Gleichungen

$$f_1(x)=0, \quad \dots \quad f_\varkappa(x)=0$$

keine von $x_1=\dots=x_n=0$ *verschiedene Lösung* $x_1, \dots x_n$ *besitzt.*

Beweis. Die Forderung ist gleichbedeutend mit der anderen, daß eine ganze positive Zahl μ existieren soll derart, daß jede der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^\mu u}{\partial x_1^\mu}=0, \quad \dots \quad \frac{\partial^\mu u}{\partial x_n^\mu}=0$$

eine Folge des Systems (9.) wird. Daher folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 3. —

Satz 2 wird vervollständigt durch den folgenden ausführlicheren Satz:

Satz 2a. Das System (6.) kann nur die beiden folgenden Fälle darbieten:

I. Unter den Lösungen u gibt es (nicht identisch verschwindende) Formen $\varphi(x)$ von jeder Dimension; dann hat man als weitere Lösungen die aus diesen $\varphi(x)$ durch Addition entstehenden unhomogenen Polynome; *es gibt aber außerdem noch Lösungen, die keine Polynome sind.*

---

*) Math. Ann., 42.

II. Es gibt eine bestimmte Dimensionenzahl p von der Beschaffenheit, daß es unter den Lösungen u zwar (nicht identisch verschwindende) Formen $\varphi(x)$ von jeder Dimension $<p$ gibt (falls $p>0$ ist), aber keine p-ter oder noch höherer Dimension; dann hat man als weitere Lösungen die aus diesen $\varphi(x)$ durch Addition entstehenden unhomogenen Polynome; *damit sind aber in diesem Falle alle Lösungen erschöpft.*

Die beiden Fälle I und II lassen sich ferner auch dadurch charakterisieren, daß es im Falle I Formen jeder Dimension gibt, die nach dem Modulsystem $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ nicht $\equiv 0$ sind, im Falle II dagegen solche Formen nur für jede Dimension $<p$ vorhanden sind (falls $p>0$ ist), während alle möglichen Formen p-ter und noch höherer Dimension $\equiv 0$ sind.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

I. Es gibt Formen $f(x)$ von jeder Dimension, die nicht $\equiv 0$ sind. Dann verschwindet der *Clebsch*sche Rest $\overline{\varphi}(x)$ einer solchen Form $f(x)$ nicht identisch, und $u=\varphi(x)$ genügt dem System (6.). Es gibt also unter den Lösungen u (nicht identisch verschwindende) Formen jeder Dimension.

Ich will zeigen, daß es auch Lösungen gibt, die keine Polynome sind. Hierzu verschaffe ich mir zunächst eine unbegrenzte Folge von (nicht identisch verschwindenden) Formen

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots$$

von steigenden Dimensionen, welche sämtlich (6.) erfüllen. Dies läßt sich natürlich ohne Benutzung eines Auswahlpostulates bewerkstelligen; denn für jede Dimension p findet sich unter den Formen $x_1^p, \ldots x_n^p$ mindestens eine, die nicht $\equiv 0$ ist, weil sonst alle Formen der Dimension $n(p-1)+1$ kongruent Null wären; ich nehme die erste von ihnen und als $\overline{\varphi}_p(x)$ ihren *Clebsch*schen Rest. Ist nun M_p das Maximum von $|\varphi_p(x)|$ für den Bereich $|x_1|\leqq 1, \ldots |x_n|\leqq 1$*) und sind $c_0, c_1, c_2, \ldots$ solche Konstanten, daß die Potenzreihe in z:

$$c_0 M_0 + c_1 M_1 z + c_2 M_2 z^2 + \cdots$$

für alle Werte von z konvergiert, so ist

$$u = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots$$

eine Lösung von (6.), die kein Polynom ist.

II. Es gibt eine Dimension p derart, daß alle möglichen Formen p-ter Dimension $\equiv 0$ sind. p sei die kleinste solche Dimension; alle Formen noch höherer Dimension sind dann auch $\equiv 0$, von jeder Dimension $<p$ aber (falls $p>0$ ist) hat man Formen $f(x)$, die nicht $\equiv 0$ sind, und daher durch Vermittlung ihrer *Clebsch*schen Reste $\overline{\varphi}(x)$ auch (nicht identisch verschwindende) Formen $\varphi(x)$, die dem System (6.) genügen. Ferner aber sind insbesondere die Formen $x_1^p, \ldots x_n^p$ kongruent Null, also die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p} = 0,\ \ \ldots\ \ \frac{\partial^p u}{\partial x_n^p} = 0$$

Folgen von (6.); daher hat (6.) ausschließlich Polynome zu Lösungen, und da ebenso auch alle Differentialgleichungen

*) oder auch etwa die Summe der absoluten Beträge der Koeffizienten von $\varphi_p(x)$.

$$\frac{\partial^q u}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}} = 0 \text{ für } q \geqq p \qquad (a_1 + \cdots + a_n = q)$$

Folgen von (6.) sind, so besitzen die Lösungspolynome nur Potenzprodukte geringerer als p-ter Dimension.

Korollar. Findet sich für irgendeinen gegebenen Wert p unter den Lösungen u von (6.) keine nicht identisch verschwindende Form p-ter Dimension, so kann man bereits schließen, daß (6.) nur Polynome als Lösungen hat.

§ 4. Das algebraische Problem des Fundamentalsystems.

Es seien $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ gegebene Formen. Wir setzen ausdrücklich voraus, daß *keine von ihnen die Dimension Null habe.*

Unter dem aus ihnen abgeleiteten *Integritätsbereich* $\mathfrak{J}$ verstehen wir die Gesamtheit derjenigen Formen $g(x)$, welche sich als ganze rationale Verbindungen von $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ mit konstanten Koeffizienten darstellen lassen. $\mathfrak{J}$ enthält hiernach auch alle Konstanten.

Definition. Eine lineare Schar $\mathfrak{L}$ von Formen $\varphi(x)$ heißt ein *Fundamentalsystem* gegenüber $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$, wenn sie die beiden folgenden Eigenschaften hat:

I. Jede beliebig vorgelegte Form $f(x)$ ist der Darstellung

(10.) $$f(x) = g_1(x)\,\varphi_1(x) + \cdots + g_\nu(x)\,\varphi_\nu(x)$$

fähig, in welcher $g_1(x), \ldots g_\nu(x)$ Formen aus $\mathfrak{J}$ und $\varphi_1(x), \ldots \varphi_\nu(x)$ Formen aus $\mathfrak{L}$ bedeuten*).

II. Es gibt keine andere lineare Schar, welche einen Teil von $\mathfrak{L}$ bildete und ebenfalls die Eigenschaft I hätte.

Es entsteht die Aufgabe, zu gegebenen $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ ein Fundamentalsystem anzugeben. Die Lösung dieser Aufgabe wird angebahnt durch den folgenden Satz:

Satz 1. Hat von den Formen $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ keine die Dimension Null, so deckt sich der Begriff eines Fundamentalsystems gegenüber $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ mit dem Begriff einer Restschar nach $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$.

Beweis. a) Wir zeigen zunächst, daß eine lineare Schar $\mathfrak{L}$ dann und nur dann die Eigenschaft I eines Fundamentalsystems besitzt, wenn sie aus jeder Kongruenzklasse mindestens eine Form enthält.

---

*) Dabei kann natürlich die Anzahl ν und sowohl die Auswahl $g_1(x), \ldots g_\nu(x)$ aus $\mathfrak{J}$ als auch die Auswahl $\varphi_1(x), \ldots \varphi_\nu(x)$ aus $\mathfrak{L}$ für verschiedene vorgelegte Formen $f(x)$ verschieden sein.

Wenn nämlich $\mathfrak{L}$ die Eigenschaft I besitzt, so unterscheiden wir in der Darstellung (10.) einer vorgelegten Form $f(x)$ diejenigen Summanden, in welchen die Faktoren $g(x)$ die Dimension Null haben, von den übrigen. Die ersteren können wir, da $\mathfrak{L}$ eine lineare Schar ist, zu einer einzigen Form $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{L}$ vereinigen; die letzteren dagegen sind kongruent Null. Es gibt also in $\mathfrak{L}$ stets eine Form $\varphi(x)$, die einer beliebig vorgelegten Form $f(x)$ kongruent ist.

Wenn umgekehrt $\mathfrak{L}$ aus jeder Kongruenzklasse mindestens eine Form enthält, so kann man jede vorgelegte Form $f(x)$ in die Gestalt

$$f(x)=\varphi(x)+Q_1(x)f_1(x)+\cdots+Q_\varkappa(x)f_\varkappa(x)$$

setzen, worin $\varphi(x)$ eine Form aus $\mathfrak{L}$ ist und $Q_1(x),\ldots Q_\varkappa(x)$ Formen sind, deren Dimensionen geringer sind als die Dimension von $f(x)$, weil wir vorausgesetzt haben, daß keine der Formen $f_1(x),\ldots f_\varkappa(x)$ die Dimension Null hat. Verfährt man also mit den Formen Q ebenso, wie hier mit $f(x)$ verfahren wurde usf., so muß das Verfahren wegen der abnehmenden Dimensionen ein Ende erreichen, womit dann eine Darstellung (10.) gewonnen ist. $\mathfrak{L}$ hat also die Eigenschaft I.

b) Wir zeigen weiter, daß eine lineare Schar $\mathfrak{L}$, welche die Eigenschaft I eines Fundamentalsystems besitzt, dann und nur dann eine andere lineare Schar $\mathfrak{L}_1$, welche ebenfalls die Eigenschaft I besitzt, als Teil enthält, wenn es in $\mathfrak{L}$ zwei voneinander verschiedene, aber zueinander kongruente Formen gibt.

Wenn nämlich eine solche lineare Schar $\mathfrak{L}_1$ vorhanden ist, so sei $\varphi(x)$ eine in $\mathfrak{L}_1$ fehlende Form von $\mathfrak{L}$. Da $\mathfrak{L}_1$ die Eigenschaft I besitzt, so muß es nach dem Teil a) des gegenwärtigen Beweises in $\mathfrak{L}_1$ eine Form $\varphi_1(x)$ geben derart, daß $\varphi(x)$ kongruent $\varphi_1(x)$ ist. Es befinden sich also in $\mathfrak{L}$ zwei verschiedene, aber kongruente Formen.

Wenn sich umgekehrt in $\mathfrak{L}$ zwei verschiedene, aber kongruente Formen befinden, so gehört auch deren Differenz zu $\mathfrak{L}$, da $\mathfrak{L}$ eine lineare Schar ist. Es gibt also in $\mathfrak{L}$ eine nicht identisch verschwindende Form $\varphi(x)$, welche kongruent Null ist. Ihre Dimension sei p, und man konstruiere zu der linearen Schar $c\varphi(x)$, wo c alle Konstanten durchläuft, eine in $\mathfrak{L}(p)$ komplementäre (§ 1 c) lineare Schar $\mathfrak{A}$ von Formen aus $\mathfrak{L}(p)$. Vereinigt man nun $\mathfrak{A}$ mit denjenigen Formen von $\mathfrak{L}$, deren Dimension von p verschieden ist, so erhält man eine lineare Schar $\mathfrak{L}_1$, welche ein von $\mathfrak{L}$

verschiedener Teil von $\mathfrak{L}$ ist und ebenfalls die Eigenschaft I besitzt, da auch sie aus jeder Kongruenzklasse mindestens eine Form enthält.

Korollar. Die Stufenzahl von $\mathfrak{L}(p)$ ist für alle Fundamentalsysteme $\mathfrak{L}$, die man gegenüber denselben Formen $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ bilden kann, dieselbe. Denn aus Satz 1 folgt, daß $\mathfrak{L}(p)$ und $\mathfrak{M}(p)$ komplementäre lineare Scharen sind, wobei $\mathfrak{M}$ wieder den aus $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ abgeleiteten Modul bedeutet.

Aus dem Satz 1 folgt nun mit Rücksicht auf § 2 als eine Lösung der gestellten Aufgabe:

Satz 2. Wenn von den Formen $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ keine die Dimension Null hat, so bildet die Gesamtheit M *derjenigen Formen $\varphi(x)$, welche dem System von Differentialgleichungen*

$$\bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0, \quad \dots \quad \bar{f}_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0$$

genügen, ein Fundamentalsystem gegenüber $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$.

Wir betrachten noch besonders den Fall $\varkappa=1$. In diesem Falle ist nur eine einzige Form $f_1(x)$ gegeben, und ihre Dimension ist >0. Der Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ besteht nur aus den Potenzen von $f_1(x)$, jede noch mit einer willkürlichen Konstanten multipliziert. Wegen der Eigenschaften einer linearen Schar kann man daher der Darstellung (10.) die Gestalt

$$f(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)f_1(x)+\dots+\varphi_\mu(x)[f_1(x)]^\mu$$

geben, worin $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots \varphi_\mu(x)$ Formen aus $\mathfrak{L}$ sind. Solange nun die Form $f_1(x)$ und das Fundamentalsystem $\mathfrak{L}$ festgehalten werden, läßt sich die beliebige Form $f(x)$ nur in einer einzigen Weise in diese Gestalt entwickeln; denn zunächst ist

$$\varphi_0(x) \equiv f(x) \mod f_1(x),$$

wodurch $\varphi_0(x)$ wegen Satz 1 eindeutig festgelegt ist; ebenso ist hierauf $\varphi_1(x)$ durch die Kongruenz

$$\varphi_1(x) \equiv \frac{f(x)-\varphi_0(x)}{f_1(x)} \mod f_1(x)$$

festgelegt, usw. Daher ergibt sich nun aus Satz 2:

Satz 3. Ist $f_1(x)$ eine gegebene Form, die nicht identisch verschwindet und nicht die Dimension Null hat, so läßt sich jede beliebig vorgelegte Form $f(x)$ auf eine und nur eine Weise in die Gestalt

$$f(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)f_1(x)+\cdots+\varphi_\mu(x)[f_1(x)]^\mu$$

entwickeln, worin $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots \varphi_\mu(x)$ *Formen bedeuten, die der Differentialgleichung*

$$\overline{f_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

genügen.

Spezielle Fälle dieses Satzes sind wohlbekannt:

a) $f_1=x^2+y^2+z^2$ mit der Differentialgleichung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

b) $f_1=v_1x_1+\cdots+v_nx_n$ mit der Differentialgleichung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial v_1}+\cdots+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n\partial v_n}=0$.

c) $f_1=x_1y_2-x_2y_1$ mit der Differentialgleichung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial y_2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial y_1}=0$, oder analog für Determinanten beliebigen Grades.

Wir kommen auf diese Beispiele und auf das in § 2 angeführte noch zurück.

§ 5. Das Differenzenprodukt P von n Variabeln.

Wir wenden die Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf ein spezielles Beispiel an.

Es seien $\sigma_1(x), \ldots \sigma_n(x)$ die elementaren symmetrischen Funktionen von $x_1, \ldots x_n$, d. h. es sei identisch in λ:

$$(1+\lambda x_1)\cdots(1+\lambda x_n)=1+\sigma_1(x)\lambda+\cdots+\sigma_n(x)\lambda^n.$$

Der aus ihnen abgeleitete Integritätsbereich $\mathfrak{Z}$ besteht aus allen symmetrischen Formen $S(x)$. Das System von Differentialgleichungen*)

$$\sigma_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0, \quad \ldots \quad \sigma_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

lautet ausführlich geschrieben:

$$(11.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=0, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_3}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_3}+\cdots+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}\partial x_n}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^n u}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}=0. \end{cases}$$

*) Es ist natürlich gleichbedeutend mit dem System von unendlich vielen Differentialgleichungen

$$S\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,$$

worin $S(x)$ alle symmetrischen Formen durchläuft, deren Dimension >0 ist.

Hilfssatz a). Das Differenzenprodukt

$$P = \prod_{\alpha<\beta} (x_\beta - x_\alpha)$$

ist eine Lösung des Systems (11.) *von Differentialgleichungen.*

Beweis. Die Behauptung kann zusammengefaßt werden in die Identität in λ

$$\left(1+\lambda\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\cdots\left(1+\lambda\frac{\partial}{\partial x_n}\right)P = P.$$

Um diese zu beweisen, vollziehe ich an

$$P = \begin{vmatrix} 1, x_1, \ldots x_1^{n-1} \\ 1, x_2, \ldots x_2^{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1, x_n, \ldots x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

zuerst die Operation $1+\lambda\frac{\partial}{\partial x_1}$ und erhalte

$$\left(1+\lambda\frac{\partial}{\partial x_1}\right)P = \begin{vmatrix} 1, x_1+\lambda, \ldots x_1^{n-1}+\lambda(n-1)x_1^{n-2} \\ 1, \quad x_2 \quad, \ldots \quad x_2^{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1, \quad x_n \quad, \ldots \quad x_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

hierauf vollziehe ich ähnlich $1+\lambda\frac{\partial}{\partial x_2}$, usw., und erhalte schließlich

$$\left(1+\lambda\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\cdots\left(1+\lambda\frac{\partial}{\partial x_n}\right)P = \begin{vmatrix} 1, x_1+\lambda, \ldots x_1^{n-1}+\lambda(n-1)x_1^{n-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1, x_n+\lambda, \ldots x_n^{n-1}+\lambda(n-1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1, x_1, \ldots x_1^{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1, x_n, \ldots x_n^{n-1} \end{vmatrix} = P.$$

Satz 1. Die einzigen Lösungen des Systems (11.) *von Differentialgleichungen sind die Derivationen des Differenzenprodukts P.*

Beweis. Wir haben zwei lineare Scharen von Formen zu betrachten: die Schar $\mathfrak{L}$ aller Formen, welche das System (11.) befriedigen, und die Schar $\mathfrak{L}_1$ aller Formen, welche Derivationen von P sind. Aus Hilfssatz a) folgt, daß $\mathfrak{L}_1$ ein Teil von $\mathfrak{L}$ ist, und es wird (nach § 3, Satz 2a Korollar) Satz 1 vollständig bewiesen sein, wenn es zu zeigen gelingt, daß $\mathfrak{L}_1$ mit $\mathfrak{L}$ identisch ist*).

*) Statt § 3 heranzuziehen, könnte man sich einfach bei der Formulierung des zu beweisenden Satzes 1 selbst auf Lösungen beschränken, welche Formen sind: für unsere Zwecke würde der so modifizierte Satz dasselbe leisten.

Um dies zu erkennen, bedenken wir, daß $\mathfrak{L}$ ein Fundamentalsystem gegenüber $\sigma_1(x), \dots \sigma_n(x)$ bildet. Wir ziehen nun ein anderes gegenüber $\sigma_1(x), \dots \sigma_n(x)$ gebildetes Fundamentalsystem $\mathfrak{L}'$ zum Vergleich heran, nämlich das *Cauchy-Kroneckers*che, bestehend aus allen Formen, welche das System von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial^n u}{\partial x_n^n} = 0$$

erfüllen, d. h. in $x_1, x_2, \dots x_n$ bzw. die Grade $0, 1, \dots n-1$ nicht überschreiten.

Die Stufenzahlen von $\mathfrak{L}(p)$, $\mathfrak{L}'(p)$, $\mathfrak{L}_1(p)$ mögen bzw. mit $l(p)$, $l'(p)$, $l_1(p)$ bezeichnet werden.

Dann ist zunächst

$$l'(p) = l(p)$$

(nach § 4, Satz 1 Korollar), und

$$l_1(p) \leqq l(p),$$

da $\mathfrak{L}_1$ einen Teil von $\mathfrak{L}$ bildet. Wir wollen nun noch $l'(p)$ und $l_1(p)$ vergleichen.

$l'(p)$ ist gleich der Anzahl der Potenzprodukte p-ter Dimension unter den Potenzprodukten

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}. \qquad (a_1 = 0;\ a_2 = 0, 1;\ \dots\ a_n = 0, 1, \dots n-1) \tag{12.}$$

$l_1(p)$ ist mindestens gleich der Anzahl der linearunabhängigen Formen p-ter Dimension unter den Formen

$$\frac{\partial^{a_1 + \cdots + a_n} P}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}}. \qquad (a_1 = 0;\ a_2 = 0, 1;\ \dots\ a_n = 0, 1, \dots n-1) \tag{13.}$$

Um die letztere Anzahl zu finden, ordnen wir zunächst P selbst steigend, nennen also in üblicher Weise das Potenzprodukt $x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$ höher als das Potenzprodukt $x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$, wenn von den Differenzen $\mu_1 - \nu_1, \dots \mu_n - \nu_n$ die erste nichtverschwindende positiv ist. Dann beginnt P mit dem Anfangsgliede*) $x_1^0 x_2^1 \cdots x_n^{n-1}$; und da bei gliedweisem Differenzieren die nicht in Wegfall kommenden Glieder in steigender Ordnung verbleiben, beginnen die Formen (13.) mit den nichtverschwindenden Anfangsgliedern

$$\frac{\partial^{a_1 + \cdots + a_n} x_1^0 x_2^1 \cdots x_n^{n-1}}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \cdots \partial x_n^{a_n}},$$

die erstens alle untereinander verschieden und zweitens, abgesehen von

*) Man kann auch zeigen, daß $P \equiv x_1^0 x_2^1 \cdots x_n^{n-1}$ modd. $\sigma_1(x), \dots \sigma_n(x)$ ist.

der Reihenfolge und von Zahlenfaktoren, mit (12.) identisch sind. Nun sind steigend geordnete Formen mit lauter verschiedenen Anfangsgliedern notwendig linearunabhängig, es ist also die Anzahl der linear unabhängigen Formen p-ter Dimension in (13.) genau so groß wie in (12.). Man hat daher das Ergebnis

$$l_1(p) \geqq l'(p).$$

Die gewonnenen drei Aussagen zusammengenommen ergeben nun:

$$l(p) = l'(p) = l_1(p),$$

und da mit der Gleichung $l_1(p) = l(p)$ zugleich die Identität von $\mathfrak{L}_1$ mit $\mathfrak{L}$ dargetan ist, so ist damit der Satz bewiesen.

Es folgt unmittelbar:

*Satz 2. Die Gesamtheit derjenigen Formen, welche Derivationen des Differenzenprodukts P sind, bildet ein Fundamentalsystem $\mathfrak{L}$ in bezug auf den Integritätsbereich der symmetrischen Formen**).

Es erscheint wünschenswert für den Satz 1 einen *direkten Beweis* zu haben, unabhängig vom Begriff des Fundamentalsystems. Zunächst erkennt man:

Hilfssatz b). Das System (11.) *hat nur Polynome zu Lösungen, und dieselben erreichen in keiner der Variablen den Grad n.*

Beweis. Da das algebraische Gleichungssystem

$$\sigma_1(x) = 0, \quad \ldots \quad \sigma_n(x) = 0$$

nur die Lösung $x_1 = \cdots x_n = 0$ hat, würde schon aus Satz 4 des § 3 folgen, daß das System (11.) bloß Polynome zu Lösungen hat und deren Grade in den einzelnen Variablen unter einer festen Grenze μ liegen. Um aber auch zu erkennen, daß gerade $\mu = n$ genommen werden kann, müssen wir davon Gebrauch machen, daß

$$x_1^n - \sigma_1(x)\, x_1^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n(x) = 0$$

und daher

$$x_1^n \equiv 0 \quad \text{modd. } \sigma_1(x), \ldots \sigma_n(x)$$

und desgleichen $x_2^n \equiv 0, \ldots x_n^n \equiv 0$ ist, worauf die Behauptung unmittelbar aus Satz 2 des § 3 folgt.

---

*) Dieses Fundamentalsystem $\mathfrak{L}$ erfüllt — im Gegensatz zu dem *Cauchy-Kronecker*schen $\mathfrak{L}'$ — die angesichts der völlig symmetrischen Fragestellung berechtigte Forderung der Symmetrie: $\mathfrak{L}$ als Ganzes geht bei Permutation der Variablen in sich über. Ein weiterer Vorteil wird sich in § 7 zeigen.

Unter Benutzung der Hilfssätze a) und b) wäre nun ein direkterer Beweis für Satz 1, als es der oben gegebene ist, zu versuchen. Einen solchen fand *J. Schur*, dem ich die Hilfssätze a) und b) als bewiesen, den Satz 1 aber noch im Stadium der Vermutung mitgeteilt hatte. Mit seiner freundlichen Erlaubnis bringe ich diesen eleganten Beweis hier zum Abdruck:

„Gegeben ist das System der Differentialgleichungen

$$(S_n) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ (\beta>\alpha)}}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = 0.$$

Zu beweisen ist, daß jede Lösung u eine lineare Verbindung der Ableitungen von

$$P = \prod_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ (\beta>\alpha)}}^{n} (x_\alpha - x_\beta)$$

ist. — Zum Beweis nehme ich an, der Satz sei richtig für das analog gebildete System in $n-1$ Variabeln

$$(S_{n-1}) \qquad \sum_{\alpha=2}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \sum_{\substack{\alpha,\beta=2 \\ (\beta>\alpha)}}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_2 \partial x_3 \cdots \partial x_n} = 0.$$

Nun wissen wir schon, daß jede Lösung u von (S_n) ein Polynom ist, das in bezug auf x_1 höchstens vom Grade $n-1$ ist. Es sei

$$u = x_1^\nu v + x_1^{\nu-1} v' + \cdots . \qquad (v \neq 0,\ \nu \leqq n-1)$$

Indem wir dies in die Gleichungen (S_n) einsetzen und die Koeffizienten von x_1^ν gleich Null setzen, erkennen wir, daß die Funktion v der Variabeln $x_2, x_3, \ldots x_n$ den Gleichungen (S_{n-1}) genügen muß. Auf Grund unserer Annahme dürfen wir also schließen, daß v eine lineare Verbindung der Ableitungen von

$$Q = \prod_{\substack{\alpha,\beta=2 \\ (\beta>\alpha)}}^{n} (x_\alpha - x_\beta)$$

sein muß. Es ist aber

$$P = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)\, Q,$$

und also

$$\frac{1}{(n-1)\cdots(\nu+1)} \frac{\partial^{n-1-\nu} P}{\partial x_1^{n-1-\nu}} = x_1^\nu Q + x_1^{\nu-1} Q' + \cdots .$$

Wir können nun eine lineare Verbindung $\bar{u}$ der Ableitungen dieser Funktion nach $x_2, x_3, \ldots$ bilden, die genau die Form

$$\bar{u} = x_1^\nu v + x_1^{\nu-1} \bar{v} + \cdots$$

erhält. Dann wird

$$u - \bar{u} = x_1^{\nu'} w + \cdots . \qquad (\nu' < \nu)$$

In genau derselben Weise bildet man eine lineare Verbindung $\overline{\overline{u}}$ der Ableitungen von P, sodaß

$$u - \bar{u} - \overline{\overline{u}} = x_1^{\nu''} s + \cdots \qquad (\nu'' < \nu')$$

wird usw. Da dieses Verfahren einmal abbrechen muß, so ergibt sich, daß u in der Form $\bar{u} + \overline{\overline{u}} + \cdots$ darstellbar ist, wo $\bar{u}, \overline{\overline{u}}, \cdots$ lineare Verbindungen der Ableitungen von P sind."

§ 6. Begriff und Theorie des Formenstaates.

Die vorgetragenen Untersuchungen sind einer Verallgemeinerung in der Richtung fähig, daß man einem geeignet gegebenen Formenbereich $\mathfrak{H}$ die Rolle zuweist, die bisher die Gesamtheit aller möglichen Formen gespielt hat.

Eine Formenmenge $\mathfrak{H}$ heißt ein *Staat*, wenn sie 1) alle Konstanten, 2) neben $h_1(x)$ und $h_2(x)$ gleicher Dimension stets auch $h_1(x) + h_2(x)$, 3) neben $h(x)$ und $k(x)$ stets auch

$$k(x) \cdot h(x) \text{ und } \bar{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot h(x)$$

enthält*).

Sind $f_1(x), \ldots f_\mu(x)$ gegebene Formen, so gibt es immer einen kleinsten sie umfassenden Staat**).

Die Brauchbarkeit des Begriffes Formenstaat beruht auf dem folgenden Lemma, welches einen Ersatz für Grundtatsache c) der Vorbemerkungen bildet.

Lemma. Ist $f(x)$ eine Form m-ter Dimension aus dem Staate $\mathfrak{H}$ und $\varphi(x)$ eine Form von der Dimension $m + \mu \geqq m$ aus $\mathfrak{H}$, so hat das Bestehen des Systems von Gleichungen

$$\bar{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x) = 0, \tag{14.}$$

worin $k(x)$ alle Formen μ-ter Dimension aus $\mathfrak{H}$ durchläuft, das Bestehen der Gleichung

---

*) Beispiele: a) der aus $s_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ abgeleitete Integritätsbereich bildet einen Staat; b) der aus $s_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ und $\sigma_2(x) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \cdots$ abgeleitete Integritätsbereich bildet einen Staat; c) der aus $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots x_n^{m_n}$ abgeleitete Integritätsbereich, worin $m_1, m_2, \ldots m_n$ gegebene nichtnegative ganze Zahlen sind, bildet einen Staat; d) vgl. § 7.

**) Man könnte ihn auch „den aus $f_1(x), \ldots f_\mu(x)$ abgeleiteten Staat" nennen und ihn direkt, ohne den allgemeinen Begriff des Staates einzuführen, definieren, ähnlich wie es in §§ 2 und 4 mit den Begriffen Modul und Integritätsbereich gehalten wurde.

$$\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0 \tag{15.}$$

zur Folge.

Beweis. Die Form

$$h(x)=\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)$$

hat die Dimension μ und ist, nach dem Begriff eines Staates, selbst eine Form von $\mathfrak{H}$. Daher gehört $h(x)$ zu denjenigen Formen, welche $k(x)$ durchläuft. Aus der Annahme (14.) folgt daher im besonderen, daß

$$\bar{h}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)h(x)=0$$

sein muß, mithin $h(x)=0$ oder (15.). —

a) Unsere nächste Aufgabe ist nun die Übertragung der Überlegungen des § 2 auf einen gegebenen Staat $\mathfrak{H}$.

Es seien $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ gegebene Formen aus dem Staate $\mathfrak{H}$. Wir gebrauchen die Bezeichnungen $\mathfrak{M}$ und M im Sinne des § 2 und verstehen unter $\mathfrak{M}_\mathfrak{H}$ bzw. $\mathsf{M}_\mathfrak{H}$ die Gesamtheit der zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Formen aus $\mathfrak{M}$ bzw. M. Von $\mathfrak{M}_\mathfrak{H}$ und $\mathsf{M}_\mathfrak{H}$ vorläufig wohl zu unterscheiden sind nun die Formenmengen $\mathfrak{M}'$ und M', die wie folgt definiert werden.

$\mathfrak{M}'$ soll die Gesamtheit derjenigen Formen $F(x)$ sein, welche sich durch geeignete Wahl von Formen $k_1(x), \dots k_\varkappa(x)$ aus $\mathfrak{H}$ in die Gestalt

$$F(x)=k_1(x)f_1(x)+\cdots+k_\varkappa(x)f_\varkappa(x)$$

bringen lassen. Dagegen wird M' durch die Forderung definiert, daß $\mathsf{M}'(p)$ für jede Dimension p gerade die Gesamtheit aller derjenigen Formen von $\mathfrak{H}(p)$ sein soll, welche zu jeder Form von $\mathfrak{M}'(p)$ orthogonal sind. Nach § 1 c) sind daher $\mathfrak{M}'(p)$ und $\mathsf{M}'(p)$ in $\mathfrak{H}(p)$ komplementär. Nach diesen Definitionen hat man jedenfalls

$$\mathfrak{M}'(p) \leqq \mathfrak{M}_\mathfrak{H}(p) \leqq \mathfrak{M}(p),$$

mithin

$$\mathsf{M}'(p) \geqq \cdots \geqq \mathsf{M}_\mathfrak{H}(p),$$

da $\mathsf{M}_\mathfrak{H}(p)$ die Gesamtheit derjenigen Formen von $\mathfrak{H}(p)$ ist, welche zu jeder Form von $\mathfrak{M}(p)$ orthogonal sind. *Also ist:*

$$\mathfrak{M}' \leqq \mathfrak{M}_\mathfrak{H}, \quad \mathsf{M}' \geqq \mathsf{M}_\mathfrak{H}.$$

Wir behaupten nun zunächst:

$$\mathsf{M}'=\mathsf{M}_\mathfrak{H}.$$

In der Tat ist $\mathsf{M}'(p)$ die Gesamtheit derjenigen Formen $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{H}(p)$, welche dem System von Differentialgleichungen

$$\overline{k}_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{f}_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0$$

genügen, worin i diejenigen Zahlen der Reihe $1, 2, \dots \varkappa$ durchläuft, für welche die Dimension m_i von $f_i(x)$ nicht größer als p ist, und $k_i(x)$ das System $\mathfrak{H}(p-m_i)$ durchläuft; nach dem Lemma folgen aber daraus die Differentialgleichungen

$$\overline{f}_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0$$

$(i=1, 2, \dots \varkappa)$, womit die Identität von $\mathsf{M}'(p)$ und $\mathsf{M}_{\mathfrak{H}}(p)$, also auch die von M' und $\mathsf{M}_{\mathfrak{H}}$ dargetan ist.

Wir behaupten weiter:

$$\mathfrak{M}'=\mathfrak{M}_{\mathfrak{H}}.$$

Denn es sind $\mathfrak{M}'(p)$ und $\mathsf{M}'(p)$ in $\mathfrak{H}(p)$ komplementär,

$$\mathfrak{M}'(p)\leqq\mathfrak{M}_{\mathfrak{H}}(p),$$
$$\mathsf{M}'(p)=\mathsf{M}_{\mathfrak{H}}(p),$$

und $\mathfrak{M}_{\mathfrak{H}}(p)$ und $\mathsf{M}_{\mathfrak{H}}(p)$ sind lineare Scharen innerhalb $\mathfrak{H}(p)$, die keine Form außer Null gemein haben; daher kann $\mathfrak{M}_{\mathfrak{H}}(p)$ nicht größer als $\mathfrak{M}'(p)$ sein, und es ist also $\mathfrak{M}'=\mathfrak{M}_{\mathfrak{H}}$.

Dieses Ergebnis $\mathfrak{M}_{\mathfrak{H}}=\mathfrak{M}'$ liefert den Satz:

Satz 1. Besteht zwischen Formen $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ und $f(x)$ die Kongruenz

$$f(x)\equiv 0 \quad \text{modd. } f_1(x), \dots f_\varkappa(x),$$

so gibt es immer eine Darstellung

$$f(x)=Q_1(x)f_1(x)+\cdots+Q_\varkappa(x)f_\varkappa(x)$$

*von der Beschaffenheit, daß $Q_1(x), \dots Q_\varkappa(x)$ dem kleinsten die Formen $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ und $f(x)$ umfassenden Formenstaate angehören**).

Ferner lehrt das Ergebnis $\mathfrak{M}_{\mathfrak{H}}=\mathfrak{M}'$, $\mathsf{M}_{\mathfrak{H}}=\mathsf{M}'$, daß $\mathfrak{M}_{\mathfrak{H}}(p)$ und $\mathsf{M}_{\mathfrak{H}}(p)$ in $\mathfrak{H}(p)$ komplementär sind. Um dies als Theorem formulieren zu können, führen wir den Begriff einer Restschar für $\mathfrak{H}$ ein.

Sind $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ Formen aus dem Staate $\mathfrak{H}$, so verstehen wir unter einer *Restschar für* $\mathfrak{H}$ nach $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ eine solche lineare Schar $\mathfrak{R}$ von Formen aus $\mathfrak{H}$, daß sich jede Form von $\mathfrak{H}$ auf eine und nur eine Weise in die Summe einer Form von $\mathfrak{R}$ und einer nach dem Modulsystem $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ der Null kongruenten Form zerlegen läßt.

Theorem. *Sind $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ Formen aus dem Staate $\mathfrak{H}$, so bildet die Gesamtheit derjenigen Formen $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{H}$, welche dem System von Differentialgleichungen*

*) Zur weiteren Durcharbeitung dieses Satzes vgl. § 9.

$$\bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0, \quad \ldots \quad \bar{f}_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0$$

genügen, eine Restschar für $\mathfrak{H}$ *nach* $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$.

Aber mit der Zerlegung einer Form $f(x)$ aus $\mathfrak{H}$ in

$$f(x)=\varphi(x)+F(x),$$

worin $\varphi(x)$ aus $\mathsf{M}_\mathfrak{H}$ und $F(x)$ aus $\mathfrak{M}_\mathfrak{H}$ entnommen ist, hat man zugleich eine Zerlegung in die Summe einer Form aus M und einer Form aus $\mathfrak{M}$ gewonnen, und da es nur eine solche gibt, muß $\varphi(x)$ zugleich der *Clebsch*sche Rest von $f(x)$ im Sinne des § 2 sein:

Satz 2. Der Clebschsche Rest einer Form $f(x)$ *nach den Formen* $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ *gehört dem kleinsten die Formen* $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ *und* $f(x)$ *umfassenden Formenstaate an.*

b) Nunmehr hat es keine Schwierigkeit, auch die Resultate des § 4 auf einen gegebenen Staat $\mathfrak{H}$ zu übertragen.

Satz 3. Hat von den Formen $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ *keine die Dimension Null, so kann eine Form* $f(x)$ *immer in die Gestalt*

$$f(x)=g_1(x)\varphi_1(x)+\cdots+g_\nu(x)\varphi_\nu(x)$$

gesetzt werden, worin die Formen $g_1(x), \ldots g_\nu(x)$ *dem aus* $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ *abgeleiteten Integritätsbereich angehören, die Formen* $\varphi_1(x), \ldots \varphi_\nu(x)$ *aber solche Lösungen des Systems von Differentialgleichungen*

$$\bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0, \quad \ldots \quad \bar{f}_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

sind, welche dem kleinsten die Formen $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ *und* $f(x)$ *umfassenden Formenstaate angehören.*

Sind $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ Formen aus einem gegebenen Formenstaate $\mathfrak{H}$ und hat keine von ihnen die Dimension Null, so verstehen wir unter einem *Fundamentalsystem für* $\mathfrak{H}$ *gegenüber* $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ eine lineare Schar $\mathfrak{L}$ von Formen aus $\mathfrak{H}$, welche die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

I. Jede Form $f(x)$ aus $\mathfrak{H}$ läßt sich in die Gestalt

$$f(x)=g_1(x)\varphi_1(x)+\cdots+g_\nu(x)\varphi_\nu(x)$$

setzen, worin $g_1(x), \ldots g_\nu(x)$ Formen aus dem aus $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ abgeleiteten Integritätsbereich und $\varphi_1(x), \ldots \varphi_\nu(x)$ Formen aus $\mathfrak{L}$ sind.

II. Es gibt keine andere lineare Schar, welche einen Teil von $\mathfrak{L}$ bildete und ebenfalls die Eigenschaft I hätte.

Satz 4. Sind $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ *Formen aus dem gegebenen Staate* $\mathfrak{H}$ *und hat keine von ihnen die Dimension Null, so deckt sich der Begriff eines*

Fundamentalsystems für $\mathfrak{H}$ gegenüber $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ mit dem Begriff einer Restschar für $\mathfrak{H}$ nach $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$.

Satz 5. Sind $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ Formen aus dem gegebenen Staate $\mathfrak{H}$ und hat keine von ihnen die Dimension Null, so bildet die Gesamtheit Λ derjenigen Formen $\varphi(x)$, welche dem System von Differentialgleichungen

$$\overline{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0, \quad \dots \quad \overline{f}_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=0$$

genügen und dem Staate $\mathfrak{H}$ angehören, ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{H}$ gegenüber $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$.

Ein besonderer Vorzug der hierdurch gewonnenen Fundamentalsysteme Λ liegt in folgender Eigenschaft. Der Formenstaat $\mathfrak{H}$ sei ein Teil eines anderen Formenstaates $\mathfrak{H}_1$ (es sei z. B. $\mathfrak{H}_1$ die Gesamtheit aller möglichen Formen). Bilden wir auch für $\mathfrak{H}_1$ das durch Satz 5 gegebene Fundamentalsystem Λ_1 gegenüber $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$, so hängen Λ und Λ_1 sichtlich in der einfachen Weise zusammen, daß Λ die Gesamtheit der zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Formen von Λ_1 ist. Von dieser Bemerkung werden wir im folgenden Paragraphen Gebrauch machen.

c) Nebenbei sei noch erwähnt, daß sich auch Satz 1 des § 3 auf Formenstaaten übertragen läßt.

Satz 6. Weiß man, daß die Differentialgleichung

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$$

erfüllt ist für alle diejenigen Lösungen u des Systems von Differentialgleichungen

$$f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0, \quad \dots \quad f_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,$$

welche Formen aus dem kleinsten die Formen $\overline{f}_1(x), \dots \overline{f}_\varkappa(x)$ und $\overline{g}(x)$ umfassenden Staate sind, so genügt dies bereits, um auf das Bestehen der Kongruenz

$$g(x) \equiv 0 \quad \text{modd. } f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$$

schließen zu können.

Denn $g(x)$ ist eine Form des kleinsten die Formen $f_1(x), \dots f_\varkappa(x)$ und $g(x)$ umfassenden Staates $\mathfrak{H}$ und orthogonal zu allen Formen von $\mathsf{M}_{\mathfrak{H}}(p)$, wenn p die Dimension von $g(x)$ bedeutet. Daher gehört $g(x)$ zu $\mathfrak{M}_{\mathfrak{H}}(p)$.

§ 7. Fortführung der Untersuchung über das Differenzenprodukt.

Ein Beispiel eines Formenstaates bildet die Gesamtheit $\mathfrak{H}$ derjenigen Formen, welche bei einer gegebenen Gruppe G von Permutationen der

Variablen $x_1, \dots x_n$ identisch ungeändert bleiben oder, wie man sagt, die Gruppe G gestatten.

Um daher ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{H}$ gegenüber den elementaren symmetrischen Formen $\sigma_1(x), \dots \sigma_n(x)$ (§ 5) zu gewinnen, genügt es (nach § 6 b) aus dem in § 5 Satz 2 aufgestellten Fundamentalsystem $\mathfrak{L}$ die zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Formen herauszugreifen:

Satz. Die Gesamtheit Λ *derjenigen homogenen Derivationen des Differenzenprodukts P, welche die gegebene Permutationsgruppe G gestatten*), bildet ein Fundamentalsystem für die Gesamtheit* $\mathfrak{H}$ *aller die Gruppe G gestattenden Formen gegenüber den elementaren symmetrischen Formen* $\sigma_1(x), \dots \sigma_n(x)$.

Diesen Satz kann man auch unabhängig von der allgemeinen Theorie des Formenstaates begründen. Hierzu ist zweierlei darzutun:

I. jede Form $h(x)$ aus $\mathfrak{H}$ läßt sich in die Gestalt

$$h(x) = S_1(x)\,\varphi_1(x) + \cdots + S_\nu(x)\,\varphi_\nu(x)$$

bringen, wo $S_1(x), \dots S_\nu(x)$ symmetrische Formen und $\varphi_1(x), \dots \varphi_\nu(x)$ Formen aus Λ sind;

II. es gibt in Λ keine von Null verschiedene Form, die modd. $\sigma_1(x), \dots \sigma_n(x)$ kongruent Null wäre.

Zum Beweise von I setzen wir zunächst nach § 5

$$h(x) = S_1(x)\,\psi_1(x) + \cdots + S_\nu(x)\,\psi_\nu(x),$$

wo $S_1(x), \dots S_\nu(x)$ symmetrische Formen und $\psi_1(x), \dots \psi_\nu(x)$ Formen aus $\mathfrak{L}$ bedeuten; hieran vollziehen wir eine Permutation π aus G, wodurch $\psi_i(x)$ in $\psi_i(x)_\pi$ übergehe, und summieren über die r Permutationen π von G; dann entsteht, wenn wir

$$\varphi_i(x) = \sum_\pi \psi_i(x)_\pi$$

setzen, die Gleichung

$$r\,h(x) = S_1(x)\,\varphi_1(x) + \cdots + S_\nu(x)\,\varphi_\nu(x).$$

---

*) Wünscht man auch zu überblicken, wie eine Form $\psi(x)$ beschaffen sein muß, damit die Derivation $\psi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)P$ von P die gegebene Gruppe G gestattet (und auch, wann zwei verschiedene Formen $\psi(x)$ dieselbe Derivation von P ergeben), so wird man auf die Frage geführt, für welche Formen $g(x)$ die Gleichung $g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)P = 0$ besteht. Nun besagt diese Gleichung, daß alle Lösungen u von (11.) auch der Differentialgleichung $g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ genügen. Nach Satz 1 des § 3 lautet daher die Antwort: $g(x) \equiv 0$ modd. $\sigma_1(x), \dots \sigma_n(x)$.

Nun erhellt ebensowohl aus der Definition von $\mathfrak{L}$ als der Gesamtheit der homogenen Derivationen von P wie aus der Definition von $\mathfrak{L}$ als der Gesamtheit aller den symmetrischen Differentialgleichungen (11.) in § 5 genügenden Formen, daß $\psi_i(x)_\pi$ ebenfalls zu $\mathfrak{L}$ und daher $\varphi_i(x)$ zu Λ gehört.

Hingegen ergibt sich II unmittelbar aus dem Umstande, daß Λ ein Teil von $\mathfrak{L}$ ist und für $\mathfrak{L}$ die entsprechende Eigenschaft schon feststeht.

An den letztgenannten Umstand knüpfen wir auch die Vergleichung dieser Untersuchungen mit denjenigen, welche *Kronecker* im § 12 der „Festschrift"*) angestellt hat. Würde man nämlich in der vorstehenden Entwicklung statt des Fundamentalsystems $\mathfrak{L}$ aus § 5 das *Cauchy-Kronecker*sche $\mathfrak{L}'$ aus § 5 zugrunde legen, so erhielte man eine lineare Schar Λ' aus $\mathfrak{H}$, die keineswegs ein Teil von $\mathfrak{L}'$ ist, und die zwar I, nicht aber II erfüllt. Um also zu einem Fundamentalsystem zu gelangen, hätte man, wie es *Kronecker* auch wirklich tut, noch die Aufgabe zu lösen Λ' weiter zu reduzieren, eine Aufgabe von ähnlicher Natur wie die ursprüngliche.

Die verschiedenen Fundamentalsysteme, die es zu einer und derselben Gruppe G von r Permutationen gibt, haben natürlich alle die gleiche Stufenzahl ν. *Kronecker* hat nun den Satz aufgestellt:

$$\nu = \frac{n!}{r}.$$

Dies kommt, da man bekanntlich die Gesamtheit der G gestattenden rationalen Funktionen von $x_1, \dots x_n$ als einen algebraischen Körper vom Grade $\frac{n!}{r}$ über dem Körper der symmetrischen rationalen Funktionen betrachten kann, auf folgende Eigenschaft eines solchen Fundamentalsystems Λ^* hinaus: Zwischen Formen $\varphi_1(x), \dots \varphi_\mu(x)$ aus Λ^*, welche keiner Relation

$$c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_\mu \varphi_\mu(x) = 0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden Konstanten $c_1, \dots c_\mu$ genügen, besteht auch keine Relation

$$S_1(x)\, \varphi_1(x) + \dots + S_\mu(x)\, \varphi_\mu(x) = 0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden symmetrischen Formen $S_1(x), \dots S_\mu(x)$. Diese Eigenschaft erkennt man aber besonders bequem gerade an unserem Fundamentalsystem Λ. Denn da Λ ein Teil von $\mathfrak{L}$ ist, brauchen wir nur für $\mathfrak{L}$ diese Eigenschaft nachzuweisen, d. h. die Giltigkeit der *Kronecker*schen Behauptung für den in § 5 betrachteten Fall, daß $r = 1$ und $\mathfrak{H}$ die Ge-

*) Bd. 92 dieses Journals.

samtheit aller möglichen Formen ist. Daß aber für diesen Fall wirklich $\nu = n!$ wird, zeigt ein Blick auf das *Cauchy-Kronecker*sche Fundamentalsystem Ω'.

Nimmt man, als Beispiel, für G die alternierende Gruppe von $r = \frac{1}{2} n!$ Permutationen, so wird $\nu = 2$; folglich kann es keine anderen G gestattenden Derivationen des Differenzenprodukts P geben als c und cP, wo c eine willkürliche Konstante bedeutet, und man kommt also direkt auf den bekannten Satz zurück, daß jede „zweiwertige" Form in der Gestalt

$$S_1(x) + S_2(x)\, P$$

mit symmetrischen Formen $S_1(x)$ und $S_2(x)$ darstellbar ist.

§ 8. Moduln und Antimoduln.

Dieser Paragraph enthält eine formale Ausgestaltung der Theorie, verbunden mit einigen Vervollständigungen*).

1. Die Definition eines *Formenstaates* und das Lemma nehmen wir aus § 6 herüber.

Unter einem *Modul im Staate* $\mathfrak{H}$ verstehen wir eine Formenmenge aus $\mathfrak{H}$, welche neben $f(x)$ und für jede Form $h(x)$ aus $\mathfrak{H}$ stets auch die Form $h(x) f(x)$ und neben den Formen gleicher Dimension $f_1(x)$ und $f_2(x)$ stets auch die Form $f_1(x) + f_2(x)$ enthält.

Unter einem *Antimodul im Staate* $\mathfrak{H}$ verstehen wir eine Formenmenge aus $\mathfrak{H}$, welche neben $\varphi(x)$ und für jede Form $h(x)$ aus $\mathfrak{H}$ stets auch die Form $\overline{h}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)$ und neben den Formen gleicher Dimension $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ stets auch die Form $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ enthält.

Nennen wir nun die Forderung

$$\overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0$$

eine *Differentialgleichung*, wenn $f(x)$ gegeben und $\varphi(x)$ gesucht ist,

eine *Antidifferentialgleichung*, wenn $\varphi(x)$ gegeben und $f(x)$ gesucht ist,

so können wir zunächst folgende Sätze und Definitionen einander gegenüberstellen:

---

*) Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei bemerkt, daß die Wahl der Buchstaben nicht mit § 6 korrespondiert.

Die Gesamtheit derjenigen Formen aus dem Staate $\mathfrak{H}$, welche dem System

$$\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0$$

von Differentialgleichungen genügen, worin $f(x)$ ein gegebenes System $\mathfrak{S}$ von Formen aus $\mathfrak{H}$ durchläuft, bildet einen Antimodul in $\mathfrak{H}$, der vorläufig als der *lösende Antimodul in* $\mathfrak{H}$ des Systems $\mathfrak{S}$ bezeichnet werden soll. Dabei besitzen aber $\mathfrak{S}$ und der kleinste $\mathfrak{S}$ umfassende Modul in $\mathfrak{H}$ stets denselben lösenden Antimodul in $\mathfrak{H}$,

von Antidifferentialgleichungen genügen, worin $\varphi(x)$ ein gegebenes System Σ von Formen aus $\mathfrak{H}$ durchläuft, bildet einen Modul in $\mathfrak{H}$, der vorläufig als der *lösende Modul in* $\mathfrak{H}$ des Systems Σ bezeichnet werden soll. Dabei besitzen aber Σ und der kleinste Σ umfassende Antimodul in $\mathfrak{H}$ stets denselben lösenden Modul in $\mathfrak{H}$,

wie man aus den Grundtatsachen a) und b) der Vorbemerkungen erkennt, und es ist daher nur eine Vereinfachung der Ausdrucksweise, wenn wir statt beliebiger Systeme $\mathfrak{S}$ bzw. Σ aus $\mathfrak{H}$ sofort Moduln bzw. Antimoduln in $\mathfrak{H}$ zugrunde legen.

Vermöge des Lemmas können dann die vorstehenden Definitionen umgeformt werden:

Der lösende Antimodul M in $\mathfrak{H}$ eines gegebenen Moduls $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{H}$ kann auch durch die Forderung definiert werden, daß $\mathsf{M}(p)$ für jede Dimension p gerade die Gesamtheit derjenigen Formen aus $\mathfrak{H}(p)$ sein soll, welche zu jeder Form von $\mathfrak{M}(p)$ orthogonal sind.

Der lösende Modul $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{H}$ eines gegebenen Antimoduls M in $\mathfrak{H}$ kann auch durch die Forderung definiert werden, daß $\mathfrak{M}(p)$ für jede Dimension p gerade die Gesamtheit derjenigen Formen aus $\mathfrak{H}(p)$ sein soll, welche zu jeder Form von $\mathsf{M}(p)$ orthogonal sind.

Aus diesen umgeformten Definitionen erhellt zunächst die Gegenseitigkeit:

Der lösende Modul in $\mathfrak{H}$ des lösenden Antimoduls in $\mathfrak{H}$ eines gegebenen Moduls $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{H}$ ist $\mathfrak{M}$ selbst.

Der lösende Antimodul in $\mathfrak{H}$ des lösenden Moduls in $\mathfrak{H}$ eines gegebenen Antimoduls M in $\mathfrak{H}$ ist M selbst.

Es ordnen sich daher die Moduln $\mathfrak{M}$ *und Antimoduln* M *in einem Staate* $\mathfrak{H}$ *in Paare* $(\mathfrak{M}, \mathsf{M})$, *deren beide Elemente sich gegenseitig als lösend bestimmen* und fortan *reziprok in* $\mathfrak{H}$ heißen mögen.

Zugleich erhellt noch, da $\mathfrak{M}(p)$ und $\mathsf{M}(p)$ in $\mathfrak{H}(p)$ komplementär sind, der Satz:

Bilden $\mathfrak{M}$ und M ein reziprokes Paar im Staate $\mathfrak{H}$, so läßt sich jede Form $h(x)$ aus $\mathfrak{H}$ auf eine und nur eine Weise in die Summe

$$h(x) = f(x) + \varphi(x)$$

einer Form $f(x)$ aus $\mathfrak{M}$ und einer Form $\varphi(x)$ aus M zerlegen.

2. Unter einem *Modul**) *bzw. Antimodul schlechthin* verstehen wir einen Modul bzw. Antimodul in dem aus allen möglichen Formen bestehenden Staate und beziehen auch die Benennung *reziprok schlechthin* auf diesen Staat.

Zwischen diesen Begriffen und den früheren, auf einen gegebenen Staat $\mathfrak{H}$ bezüglichen, besteht aber ein einfacher Zusammenhang.

Es sei $(\mathfrak{M}, \mathsf{M})$ ein reziprokes Paar in $\mathfrak{H}$. Ist nun $\mathfrak{M}'$ der kleinste $\mathfrak{M}$ umfassende Modul schlechthin, M'' der kleinste M umfassende Antimodul schlechthin, so besteht nach den Grundtatsachen a) und b) der Vorbemerkungen für jede Form $f(x)$ aus $\mathfrak{M}'$ und jede Form $\varphi(x)$ aus M'' die Gleichung

$$\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0.$$

Daraus folgt insbesondere für die Gesamtheit

$\mathfrak{M}'_{\mathfrak{H}}$ der zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Formen von $\mathfrak{M}'$, daß jede Form aus $\mathfrak{M}'_{\mathfrak{H}}(p)$ orthogonal ist zu jeder Form aus $\mathsf{M}(p)$ und daher

$$\mathfrak{M}'_{\mathfrak{H}} = \mathfrak{M}$$

sein muß:

Jeder Modul im Staate $\mathfrak{H}$ kann aufgefaßt werden als die Gesamtheit der zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Formen aus dem kleinsten ihn umfassenden Modul schlechthin.

$\mathsf{M}''_{\mathfrak{H}}$ der zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Formen von M'', daß jede Form aus $\mathsf{M}''_{\mathfrak{H}}(p)$ orthogonal ist zu jeder Form aus $\mathfrak{M}(p)$ und daher

$$\mathsf{M}''_{\mathfrak{H}} = \mathsf{M}$$

sein muß:

Jeder Antimodul im Staate $\mathfrak{H}$ kann aufgefaßt werden als die Gesamtheit der zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Formen aus dem kleinsten ihn umfassenden Antimodul schlechthin.

Und da umgekehrt die Gesamtheit der einem Modul bzw. Antimodul schlechthin und einem Staate $\mathfrak{H}$ gemeinsamen Formen gewiß einen Modul bzw. Antimodul in $\mathfrak{H}$ bildet, so ergibt sich:

Der Begriff eines Moduls bzw. Antimoduls in einem Staate $\mathfrak{H}$ deckt sich mit dem Begriff der Gesamtheit derjenigen Formen, welche ein Modul bzw. Antimodul schlechthin mit dem Staate $\mathfrak{H}$ gemein hat.

*) *Hilbert*, Mathem. Ann. 36.

Ist noch M' der reziproke Antimodul schlechthin zu $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ der reziproke Modul schlechthin zu M'' und bezeichnet man mit $\mathsf{M}'_{\mathfrak{H}}$ bzw. $\mathfrak{M}''_{\mathfrak{H}}$ die Gesamtheit der zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Formen aus M' bzw. $\mathfrak{M}''$, so muß nach den Grundtatsachen a) und b) der Vorbemerkungen $\mathsf{M}'_{\mathfrak{H}} = \mathsf{M}$ und $\mathfrak{M}''_{\mathfrak{H}} = \mathfrak{M}$ sein, so daß man zusammenfassend erhält:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'_{\mathfrak{H}} = \mathfrak{M}''_{\mathfrak{H}} \qquad\qquad \mathsf{M} = \mathsf{M}'_{\mathfrak{H}} = \mathsf{M}''_{\mathfrak{H}}$$

und daher in

$$(\mathfrak{M}'_{\mathfrak{H}}, \mathsf{M}'_{\mathfrak{H}}) \qquad \text{und} \qquad (\mathfrak{M}''_{\mathfrak{H}}, \mathsf{M}''_{\mathfrak{H}})$$

je ein reziprokes Paar in $\mathfrak{H}$ erkennt:

Es sei $(\mathfrak{M}', \mathsf{M}')$ ein reziprokes Paar schlechthin und $\mathfrak{M}'_{\mathfrak{H}}$ bzw. $\mathsf{M}'_{\mathfrak{H}}$ die Gesamtheit derjenigen Formen, welche $\mathfrak{M}'$ bzw. M' mit einem gegebenen Staate $\mathfrak{H}$ gemein haben. Falls nun der kleinste $\mathfrak{M}'_{\mathfrak{H}}$ umfassende Modul schlechthin gerade $\mathfrak{M}'$ selbst ist, dann bilden $\mathfrak{M}'_{\mathfrak{H}}$ und $\mathsf{M}'_{\mathfrak{H}}$ ein reziprokes Paar in $\mathfrak{H}$.

Wird also in diesem Falle irgend eine Form $h(x)$ von $\mathfrak{H}$ in die Summe

$$h(x) = f(x) + \varphi(x)$$

einer Form $f(x)$ aus $\mathfrak{M}'$ und einer Form $\varphi(x)$ aus M' zerlegt, so gehören $f(x)$ und $\varphi(x)$ selbst zu $\mathfrak{H}$.

Es sei $(\mathfrak{M}'', \mathsf{M}'')$ ein reziprokes Paar schlechthin und $\mathfrak{M}''_{\mathfrak{H}}$ bzw. $\mathsf{M}''_{\mathfrak{H}}$ die Gesamtheit derjenigen Formen, welche $\mathfrak{M}''$ bzw. M'' mit einem gegebenen Staate $\mathfrak{H}$ gemein haben. Falls nun der kleinste $\mathsf{M}''_{\mathfrak{H}}$ umfassende Antimodul schlechthin gerade M'' selbst ist, dann bilden $\mathfrak{M}''_{\mathfrak{H}}$ und $\mathsf{M}''_{\mathfrak{H}}$ ein reziprokes Paar in $\mathfrak{H}$.

Wird also in diesem Falle irgend eine Form $h(x)$ von $\mathfrak{H}$ in die Summe

$$h(x) = f(x) + \varphi(x)$$

einer Form $f(x)$ aus $\mathfrak{M}''$ und einer Form $\varphi(x)$ aus M'' zerlegt, so gehören $f(x)$ und $\varphi(x)$ selbst zu $\mathfrak{H}$.

Beispiel. Es sei $n = 3$ und $\mathfrak{H}, \mathfrak{M}, \ldots$ die Gesamtheit aller Formen von bzw. der Gestalt:

$$\mathfrak{H}: \quad \Phi(x_1 x_2, x_1^2 + x_2^2)$$

$$\mathfrak{M}: \quad x_1 x_2 \Phi(x_1 x_2, x_1^2 + x_2^2) \qquad \mathsf{M}: \quad c \cdot (x_1^{2m} + x_2^{2m})$$

$$\mathfrak{M}': \quad x_1 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) \qquad \mathsf{M}': \quad \varphi(x_1, x_3) + \psi(x_2, x_3)$$

$$\mathfrak{M}'': \quad x_1 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) + x_3 Q_1(x_1, x_2, x_3) \qquad \mathsf{M}'': \quad c_1 x_1^m + c_2 x_2^m,$$

worin c, c_1, c_2 Konstante, m eine nichtnegative ganze Zahl und $Q, Q_1, \Phi, \varphi, \psi$ Formen mit konstanten Koeffizienten von den jeweilig angeführten Argumenten bedeuten und die einzige Beschränkung die ist, daß die entstehenden Ausdrücke homogen ausfallen sollen.

Man bestätigt, daß

$$\mathfrak{M}'_{\mathfrak{H}} = \mathfrak{M}''_{\mathfrak{H}} = \mathfrak{M} \qquad\qquad \mathsf{M}'_{\mathfrak{H}} = \mathsf{M}''_{\mathfrak{H}} = \mathsf{M}$$

ist.

Versteht man dagegen unter $\mathfrak{M}^*$ und M^* die Gesamtheit aller Formen von bzw. der Gestalt:

$\mathfrak{M}^*$: $x_1 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) + x_1^2 Q_1(x_1, x_2, x_3)$ $\quad$ M^*: $cx_1 x_3^m + \psi(x_2, x_3)$,

so bilden auch $\mathfrak{M}^*$ und M^* ein reziprokes Paar schlechthin und haben mit $\mathfrak{H}$ die Gesamtheit $\mathfrak{M}_{\mathfrak{H}}^*$ bzw. $\mathsf{M}_{\mathfrak{H}}^*$ aller Formen von folgender Gestalt gemein:

$\mathfrak{M}_{\mathfrak{H}}^*$: $x_1 x_2 \Phi(x_1 x_2, x_1^2 + x_2^2)$ $\quad$ $\mathsf{M}_{\mathfrak{H}}^*$: c,

so daß $\mathfrak{M}_{\mathfrak{H}}^* = \mathfrak{M}$ ist, also $\mathfrak{M}_{\mathfrak{H}}^*$ und $\mathsf{M}_{\mathfrak{H}}^*$ nicht reziprok in $\mathfrak{H}$ sind; in der Tat sind die Voraussetzungen des letzten Satzes nicht erfüllt.

3. Die folgenden Überlegungen zielen auf die Ersetzung der Moduln und Antimoduln durch endliche Systeme ab.

Ist $\mathfrak{S}$ irgend eine Menge von Formen, so soll $\mathfrak{S}(\leqq p)$ die Gesamtheit derjenigen Formen von $\mathfrak{S}$ bedeuten, deren Dimension $\leqq p$ ist, und ähnlich ist die Bezeichnung $\mathfrak{S}(\geqq p)$ zu verstehen.

Es sei $(\mathfrak{M}, \mathsf{M})$ ein reziprokes Paar im Staate $\mathfrak{H}$.

Nach einem *Theorem von Hilbert**) und unter Berücksichtigung von § 6, Satz 1 (bzw. den entsprechenden Ausführungen des gegenwärtigen Paragraphen) hat man den Satz:

Es gibt einen endlichen Wert p derart, daß $\mathfrak{M}$ der kleinste das System $\mathfrak{M}(\leqq p)$ umfassende Modul in $\mathfrak{H}$ ist.

Der kleinste solche Wert $p = p_0$ heiße der *Ruhepunkt von* $\mathfrak{M}$.

Ich betrachte diejenigen Werte q, für welche M der kleinste das System $\mathsf{M}(\geqq q)$ umfassende Antimodul in $\mathfrak{H}$ ist. Gibt es unter diesen Werten einen größten $q = q_0$, so nenne ich ihn den Ruhepunkt von M; andernfalls sage ich, M habe den Ruhepunkt ∞.

Es hat nun der Ruhepunkt von $\mathfrak{M}$ eine einfache Bedeutung für M und umgekehrt. Damit nämlich die Form aus $\mathfrak{H}$

$f(x)$ zu $\mathfrak{M}$ gehört, ist zunächst notwendig und hinreichend, daß sie dem System von Antidifferentialgleichungen

$$\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0$$

$\varphi(x)$ zu M gehört, ist zunächst notwendig und hinreichend, daß sie dem System von Differentialgleichungen

$$\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0$$

*) Mathem. Ann., 36. — Bei *Weber*, Lehrbuch der Algebra, Bd. II, 2. Aufl. ist der Beweis so dargestellt, daß kein Auswahlpostulat benutzt wird.

genügt, worin $\varphi(x)$ das System $\mathsf{M}(\geqq q_0)$ durchläuft, vorausgesetzt, daß q_0 endlich ist; daraus folgt:

Wenn für eine Form $f(x)$ aus $\mathfrak{H}$ von der Dimension $q < q_0$ die Formen

$$F(x) = k(x)f(x),$$

worin $k(x)$ das System $\mathfrak{h}$ $(\geqq q_0 - q)$ durchläuft — so daß $F(x)$ mindestens die Dimension q_0 hat —, sämtlich zu $\mathfrak{M}$ gehören, so gehört $f(x)$ selbst zu $\mathfrak{M}$; dabei ist q_0 als endlich vorausgesetzt.

Und q_0 ist zugleich die größte Zahl von dieser Beschaffenheit. Ist hingegen der Ruhepunkt von M ∞, so hat jede Zahl die genannte Eigenschaft.

genügt, worin $f(x)$ das System $\mathfrak{M}(\leqq p_0)$ durchläuft; daraus folgt:

Wenn für eine Form $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{H}$ von der Dimension $p > p_0$ die Formen

$$\Phi(x) = \bar{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x),$$

worin $k(x)$ das System $\mathfrak{h}$ $(\geqq p - p_0)$ durchläuft — so daß $\Phi(x)$ höchstens die Dimension p_0 hat —, *sämtlich zu M gehören, so gehört $\varphi(x)$ selbst zu M.*

Und p_0 ist zugleich die kleinste Zahl von dieser Beschaffenheit.

Speziell für *Moduln und Antimoduln schlechthin* kann man den Ruhepunkt

p_0 von $\mathfrak{M}$ als den kleinsten Wert definieren, für den $\mathfrak{M}(\geqq p_0)$ der kleinste das System $\mathfrak{M}(p_0)$ umfassende Modul schlechthin ist,

q_0 von M als den größten Wert definieren, für den $\mathsf{M}(\leqq q_0)$ der kleinste das System $\mathsf{M}(q_0)$ umfassende Antimodul schlechthin ist, bzw. ∞, wenn ein solcher größter nicht vorhanden ist,

und den aufgestellten Sätzen die Gestalt geben:

Wenn für eine Form $f(x)$, deren Dimension $< q_0$ ist, die n Formen

$$x_1 f(x), \ \ldots \ x_n f(x)$$

zu $\mathfrak{M}$ gehören, so gehört $f(x)$ selbst zu $\mathfrak{M}$.

Wenn für eine Form $\varphi(x)$, deren Dimension $> p_0$ ist, die n Formen

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x), \ \ldots \ \frac{\partial}{\partial x_n}\varphi(x)$$

zu M gehören, so gehört $\varphi(x)$ selbst zu M.

Nach diesen Vorbereitungen kann der Übergang zu endlichen Systemen ohne weiteres erfolgen:

Ist $\mathfrak{M}$ ein Modul im Staate $\mathfrak{H}$, so kann man in $\mathfrak{M}$ endlich viele Formen $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ finden derart, daß $\mathfrak{M}$ selbst der kleinste $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ umfassende Modul in $\mathfrak{H}$ ist.

Ist M ein Antimodul schlechthin, so kann man in M endlich viele Formen $\varphi_1(x), \ldots \varphi_\varkappa(x)$ — von deren Dimensionen die größte p_1 heißen möge — finden derart, daß

Folglich kann ein Antimodul in $\mathfrak{H}$ *auch definiert werden als die Gesamtheit der Formen* $\varphi(x)$ *aus* $\mathfrak{H}$, *welche einem System von endlich vielen Differentialgleichungen*

$$\bar{f}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0, \ldots \bar{f}_\varkappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0$$

genügen, worin $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ *gegebene Formen aus* $\mathfrak{H}$ *bedeuten.*

man aus ihnen M *selbst zurückgewinnen kann, indem man zu dem kleinsten sie umfassenden Antimodul schlechthin* M_1 *noch alle diejenigen Formen jeder Dimension* $p > p_1$ *hinzufügt, deren* $(p-p_1)$*-te Ableitungen sämtlich zu* M_1 *gehören.* („Integration totaler Differentiale".)

4. Eine Formenmenge $\mathfrak{J}$ heißt ein *Integritätsbereich*, wenn sie 1) alle Konstanten, 2) neben $f_1(x)$ und $f_2(x)$ gleicher Dimension stets auch $f_1(x)+f_2(x)$, 3) neben $f(x)$ und $f_1(x)$ stets auch $f(x)\cdot f_1(x)$ enthält.

Es sei $\mathfrak{J}$ ein Integritätsbereich, dessen Formen sämtlich dem Staate $\mathfrak{H}$ angehören.

Eine lineare Schar $\mathfrak{L}$ von Formen aus $\mathfrak{H}$ heißt ein *Fundamentalsystem* für $\mathfrak{H}$ gegenüber $\mathfrak{J}$, wenn

I. jede Form $h(x)$ aus $\mathfrak{H}$ in die Gestalt

$$h(x) = g_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + g_\nu(x)\varphi_\nu(x)$$

mit Formen $g_1(x), \ldots g_\nu(x)$ aus $\mathfrak{J}$ und Formen $\varphi_1(x), \ldots \varphi_\nu(x)$ aus $\mathfrak{L}$ gesetzt werden kann,

II. keine andere lineare Schar existiert, die ein Teil von $\mathfrak{L}$ wäre und ebenfalls die Eigenschaft I hätte.

Bezeichnet nun $\mathfrak{J}^*$ die Formenmenge, welche man erhält, indem man aus $\mathfrak{J}$ alle von Null verschiedenen Konstanten wegläßt, und $\mathfrak{M}$ den kleinsten $\mathfrak{J}^*$ umfassenden Modul in $\mathfrak{H}$, so ist eine lineare Schar dann und nur dann ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{H}$ gegenüber $\mathfrak{J}$, wenn sich jede Form $h(x)$ aus $\mathfrak{H}$ auf eine und nur eine Weise in die Summe

$$h(x) = f(x) + \varphi(x)$$

einer Form $f(x)$ aus $\mathfrak{M}$ und einer Form $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{L}$ zerlegen läßt.

Der Begriff des Fundamentalsystems hängt daher im Grunde nicht an $\mathfrak{J}$, *sondern an* $\mathfrak{M}$. Sind also $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}_1$ zwei Integritätsbereiche von Formen aus $\mathfrak{H}$, welche denselben Modul $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{H}$ ergeben, so hat $\mathfrak{H}$ gegenüber $\mathfrak{J}$ dieselben Fundamentalsysteme $\mathfrak{L}$ wie gegenüber $\mathfrak{J}_1$.

Nun kann man aus $\mathfrak{J}^*$ eine endliche Anzahl von Formen $f_1(x), \ldots f_\varkappa(x)$ so auswählen, daß der kleinste sie umfassende Modul in $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{M}$ zusammen-

fällt. Dann kann man für $\mathfrak{J}_1$ gerade den kleinsten $f_1(x), \ldots f_s(x)$ umfassenden (also nach der Ausdrucksweise des § 4 den aus ihnen abgeleiteten) Integritätsbereich nehmen. Auf solche — sogenannte *endliche* — Integritätsbereiche kann man sich daher bei dem Problem des Fundamentalsystems beschränken.

Ist $\mathfrak{M}$ der kleinste $\mathfrak{J}^*$ umfassende Modul in $\mathfrak{H}$ und M der zu $\mathfrak{M}$ reziproke Antimodul in $\mathfrak{H}$, so bildet M ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{H}$ gegenüber $\mathfrak{J}$.

§ 9. Endlichkeitssätze.

In den letzten Erörterungen des vorigen Paragraphen nehmen wir nun als den gegebenen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ speziell den Staat $\mathfrak{H}$ selbst.

Danach kann man aus $\mathfrak{H}$ einen endlichen Integritätsbereich $\mathfrak{J}_1$ derart herausgreifen, daß $\mathfrak{H}$ gegenüber $\mathfrak{J}_1$ dieselben Fundamentalsysteme besitzt wie gegenüber $\mathfrak{H}$ selbst. Dies besagt aber, daß die Gesamtheit aller Konstanten ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{H}$ gegenüber $\mathfrak{J}_1$ bildet; folglich sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}_1$ identisch:

Satz 1. Jeder Formenstaat ist ein endlicher Integritätsbereich.

Führt man die Spezialisierung $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}$ gleich am Anfang des Beweisganges ein, so erweist sich der Satz als eine unmittelbare Folge des *Hilbert*schen Theorems in Verbindung mit Satz 1 des § 6.

Der Begriff des Integritätsbereiches bzw. endlichen Integritätsbereiches (und ebenso der des Moduls und Antimoduls schlechthin) ist invariant gegenüber allen linearen homogenen Transformationen (mit nichtverschwindenden Determinanten) der Variablen $x_1, \ldots x_n$ in neue Variable $x_1', \ldots x_n'$. Dagegen ist der Begriff des Formenstaates (und ebenso die Begriffe: Orthogonalität von Formen gleicher Dimension, *Clebsch*scher Rest nach einem Modulsystem, Reziprozität zwischen Moduln und Antimoduln schlechthin), abgesehen von Ähnlichkeitstransformationen ($x_1 = \lambda x_1', \ldots x_n = \lambda x_n'$), nur gegenüber den im *Hermite*schen Sinne orthogonalen Transformationen invariant, d. h. denjenigen, welche die nichtanalytische Funktion $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$ invariant lassen, also identisch die Gleichung $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = |x_1'|^2 + \cdots + |x_n'|^2$ erfüllen.

Wir bezeichnen allgemein mit L^* diejenige Transformation, deren Matrix aus der der Transformation L hervorgeht, indem man die Zeilen zu Spalten macht und überdies die Elemente durch die konjugiert-komplexen ersetzt. Dann lassen sich also die im *Hermite*schen Sinne orthogo-

nalen Transformationen, die wir allgemein mit P bezeichnen, durch die Bedingung $P^{-1} = P^*$ charakterisieren, worin P^{-1} die Umkehrtransformation zu P bedeutet.

Angesichts des dargelegten Sachverhalts ist es nun nicht überflüssig, den Satz 1 so zu erweitern:

Satz 2. Wenn eine gegebene Formenmenge sich durch eine lineare homogene Transformation L von nichtverschwindender Determinante in einen Formenstaat verwandeln läßt), so ist sie ein endlicher Integritätsbereich.*

Eine naheliegende Anwendung ist die folgende. Ist G eine gegebene Gruppe linearer homogener Transformationen (von nichtverschwindenden Determinanten) der Variablen $x_1, \ldots x_n$ in neue Variable $x_1', \ldots x_n'$, so verstehen wir unter einer *Invariante* der Gruppe G eine Form**) $f(x)$, die für jede Transformation K aus G die identische Gleichung $f(x) = f(x')$ erfüllt. Wenn nun die Gruppe G die Eigenschaft hat, neben K stets auch die Transformation K^* zu enthalten, so bildet die Gesamtheit aller Invarianten von G einen Formenstaat. Dabei ist die verlangte Eigenschaft der Gruppe G, abgesehen von Ähnlichkeitstransformationen, nur gegenüber den Transformationen P invariant, und das Resultat muß daher so formuliert werden:

Satz 3. Wenn eine vorgelegte Gruppe G von linearen homogenen Transformationen (mit nichtverschwindenden Determinanten) sich in eine Gruppe transformieren läßt, welche neben K stets auch K^* enthält, so bilden die Invarianten von G einen endlichen Integritätsbereich.

(Fortsetzung folgt.)

---

*) Wenn es überhaupt eine Transformation L gibt, die dies bewirkt, so leisten alle Produkte LP dasselbe; denn den P gegenüber ist der Begriff des Formenstaates invariant. (Es genügt daher z. B. nur solche L zu verwenden, die zu einer reellwertigen [was auf $L^* = L$ hinausläuft] und positiven *Hermite*schen Form gehören. Oder auch z. B. nur solche von der Form $L = PM$, worin M eine Transformation $x_1 = \mu_1 x_1', \ldots x_n = \mu_n x_n'$ mit reellen positiven $\mu_1, \ldots \mu_n$ bedeutet.) Analoges ist zu Satz 3 zu bemerken.

**) Danach hat z. B. die Gruppe aller P keine nichtkonstanten Invarianten.

Über ein algebraisches Theorem*).

Von *S. Gundelfinger.*

In der Theorie einer binären biquadratischen Form (f) treten drei irrationale Kovarianten zweiten Grades auf, deren Produkt die rationale Kovariante sechsten Grades (T) von f ist. Da T, gebildet für den Büschel $zf + \lambda H$ (H die *Hesse*sche Kovariante von f) sich bis auf einen konstanten Faktor reproduziert, so war zu vermuten, daß auch jede der irrationalen Kovarianten 2. Grades, für $zf + \lambda H$ gebildet, sich bis auf einen konstanten Faktor reproduziere. So leicht ich nun diese Vermutung sowohl durch direkte Ausrechnung als auch durch geometrische Betrachtungen**) verifizieren und dadurch schon vor vierzig Jahren die *Aronhold*sche Auflösung

*) Wir veröffentlichen diese letzte Arbeit von *Sigmund Gundelfinger* in wehmütiger und dankbarer Erinnerung an den dahingegangenen treuen Freund unserer Zeitschrift. Leider war es ihm nicht mehr vergönnt, in einem zweiten Teile seiner Arbeit Anwendungen des hier bewiesenen Theoremes auf die binären biquadratischen und die ternären kubischen Formen zu geben, und in der Abhandlung selbst hat er seine Gedanken in der allerknappsten Form zusammengefaßt. Dennoch glauben wir, daß die Abhandlung, welche noch einmal alle Vorzüge dieses bedeutenden Mathematikers zeigt, auch in der vorliegenden Form den Lesern unserer Zeitschrift wertvoll und willkommen sein wird. *K. Hensel.*

**) Zwei darauf gegründete Beweise habe ich in einem Briefe vom 8./9. Nov. 1908 an Herrn *Kurt Hensel* mitgeteilt, und zwar unmittelbar nach dem Erscheinen der Arbeit des Herrn *Haentzschel* in diesem Journal, Bd. 135, S. 75.

der Gleichung 4. Grades $f=0$*) auf die Gleichung $\varkappa f+\lambda H=0$ ohne weitere Rechnung ausdehnen konnte**), so habe ich die wahre Quelle der fundamentalen Eigenschaft der irrationalen Kovarianten 2. Grades erst viele Jahre später gefunden, und zwar in einem allgemeinen Theorem, das in nuce bereits enthalten ist in meiner Arbeit: Mathematische Annalen IV, S. 164 ff. Es lautet in seinen vier Bestandteilen folgendermaßen.

I. Es sei:

$$f=ax_1^p+pbx_1^{p-1}x_2+\binom{p}{2}cx_1^{p-2}x_2^2+\cdots$$

eine beliebig gegebene Grundform von irgend einer Anzahl Variabeln und

$$\Delta=\alpha x_1^p+p\beta x_1^{p-1}x_2+\binom{p}{2}\gamma x_1^{p-2}x_2^2+\cdots$$

eine Kovariante derselben von gleichem Grade und von der Ordnung m in den Koeffizienten. Ferner bestehe die Relation

$$\delta\Delta\equiv\frac{\partial\Delta}{\partial a}\alpha+\frac{\partial\Delta}{\partial b}\beta+\frac{\partial\Delta}{\partial c}\gamma+\cdots=mSf,$$

mit S eine gewisse Invariante von f bezeichnet, so ist Δ, gebildet für $\varkappa f-\lambda\Delta$, von der Form:

$$\text{(I.)}\qquad \Delta_{\varkappa f-\lambda\Delta}\equiv\Delta_{\varkappa\lambda}=\frac{1}{m+1}\left\{\frac{\partial G}{\partial\lambda}f+\frac{\partial G}{\partial\varkappa}\Delta\right\},$$

worin G eine ganze Funktion $(m+1)$-ten Grades der beliebigen Konstanten $\varkappa$ und λ bedeutet.

II. Setzt man

$$G(\mu,\nu)=\mu^{m+1}+g_2\mu^{m-1}\nu^2+g_3\mu^{m-2}\nu^3+\cdots+g_{m+1}\nu^{m+1},$$

so wird vermöge der Substitution

$$(S)\qquad \begin{aligned}\mu&=\varrho\varkappa-G_2\sigma,\\ \nu&=\varrho\lambda+G_1\sigma,\end{aligned}\qquad (S')\qquad \begin{aligned}\varrho G&=\mu G_1+\nu G_2,\\ \sigma G&=-\mu\lambda+\nu\varkappa,\end{aligned}$$

$$G_1=\frac{1}{m+1}\frac{\partial G(\varkappa,\lambda)}{\partial\varkappa},\qquad G_2=\frac{1}{m+1}\frac{\partial G(\varkappa,\lambda)}{\partial\lambda},$$

$$\text{(II.)}\qquad G(\mu,\nu)=G(\varkappa,\lambda)\{\varrho^{m+1}+(g_2)_{\varkappa f-\lambda\Delta}\cdot\varrho^{m-1}\sigma+\cdots+(G_{m+1})_{\varkappa f-\lambda\Delta}\cdot\sigma^{m+1}\}.$$

III. Nennt man die Wurzeln der Gleichung

$$G\left(\frac{\varkappa}{\lambda},1\right)=0:\quad \lambda',\lambda'',\ldots\lambda^{(m+1)},\quad \text{so ist}$$

$$(\lambda')_{\varkappa f-\lambda\Delta}=\frac{\lambda' G_1+G_2}{\varkappa-\lambda'\lambda},\ (\lambda'')_{\varkappa f-\lambda\Delta}=\frac{\lambda'' G_1+G_2}{\varkappa-\lambda''\lambda},\ \cdots$$

*) Dieses Journal, Bd. 52, S. 95.

**) Mathematische Annalen, III, S. 272 Note.

IV. Bildet man $\lambda' f - \Delta$ für $\varkappa f - \lambda \Delta$, so wird

$$(\lambda' f - \Delta)_{\varkappa f - \lambda \Delta} = (\lambda' f - \Delta) \frac{G(\varkappa, \lambda)}{\varkappa - \lambda' \lambda},$$

$$(\lambda'' f - \Delta)_{\varkappa f - \lambda \Delta} = (\lambda'' f - \Delta) \frac{G(\varkappa, \lambda)}{\varkappa - \lambda'' \lambda}.$$

Beweis. Ad I: Enthält irgend eine Form φ die Koeffizienten von f in der Ordnung q und setzt man:

$$\varphi_{\varkappa f - \lambda \Delta} \equiv \varphi_{\varkappa \lambda} = \varkappa^q \varphi - \binom{q}{1} \varkappa^{q-1} \lambda \varphi' + \binom{q}{2} \varkappa^{q-2} \lambda^2 \varphi'' + \cdots,$$

so sind je drei aufeinanderfolgende $\varphi^{(i)}$ nach dem *Taylor*schen Theorem durch die Rekursionsformel verbunden:

$$(q - k)\, \varphi^{(k+1)} = \delta \varphi^{(k)} - mS \varphi^{(k-1)}*).$$

Für $\varphi = \Delta$ ergibt sich hienach sofort, daß $\Delta_{\varkappa \lambda}$ von der Form:

$$\Delta_{\varkappa f - \lambda \Delta} = G_1 \Delta + G_2 f,$$

worin G_1 und G_2 ganze Funktionen m-ten Grades von $\varkappa$ und λ. Da für $\varkappa = 1, \lambda = 0$, $\Delta_{\varkappa \lambda}$ sich auf Δ reduziert, so werden die Koeffizienten von $\varkappa^m$ in G_1 und G_2 gleich der Einheit, resp. gleich Null. Da $\delta \Delta = mSf$, so sind die Koeffizienten von $\varkappa^{m-1} \lambda$ in G_1 und G_2 gleich Null, resp. gleich mS.

Daß $(m + 1) G_1$ und $(m + 1) G_2$ gleich den partiellen Differentialquotienten nach $\varkappa$ und λ der Funktion:

---

*) Setzt man $\varphi = \varphi_0 = \varphi(a, b, c, \ldots)$, $\varphi_1 = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial b} + \gamma \frac{\partial}{\partial c} + \cdots\right) \varphi$,

allgemein $\varphi_l = \frac{1}{l!} \left\{\alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial b} + \gamma \frac{\partial}{\partial c} + \cdots\right\}^l \varphi(a, b, c, \ldots), l = 1, 2, \ldots \varkappa - 1, \varkappa, \varkappa + 1, \ldots q,$

so enthält $\delta \varphi_\varkappa$ zwei Teile, den einen durch Differentiation nach den in $\varphi_\varkappa$ *explizite* auftretenden $a, b, c, \ldots$, den anderen durch Differentiation nach den in $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *implizite* auftretenden $a, b, c, \ldots$. Der erste Teil ist:

$$\frac{1}{\varkappa!} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial a} + \beta \frac{\partial}{\partial b} + \gamma \frac{\partial}{\partial c} + \cdots\right)^{\varkappa+1} \varphi(a, b, c, \ldots) = (\varkappa + 1)\, \varphi_{\varkappa+1},$$

der andere wird mit Rücksicht auf $\delta \alpha = mSa$, $\delta \beta = mSb, \ldots$:

$$(mS) \left\{\left[a \frac{\partial}{\partial a} + b \frac{\partial}{\partial b} + c \frac{\partial}{\partial c} + \cdots\right] \varphi_{\varkappa-1}(a, b, c, \ldots)\right.$$

oder nach dem Fundamentalsatz über homogene Funktionen gleich $mS[q - \varkappa + 1]\, \varphi_{\varkappa-1}$. Zusammengefaßt hat man also $\delta \varphi_\varkappa = (\varkappa + 1)\, \varphi_{\varkappa+1} + mS\,(q - \varkappa + 1)\, \varphi_{\varkappa-1}$, welche Rekursionsformel von der im Text gegebenen nur formell verschieden ist. Zum ersten Male ist dieselbe von mir Math. Ann. IV, S. 164 Gl. (4) aufgestellt und von *Clebsch* später an verschiedenen Stellen (Theorie der binären algebraischen Formen, S. 122, 138 und Math. Annalen Bd. VI, S. 460—463) berührt und elegant bewiesen worden.

$$G(x, \lambda) = xG_1 + \lambda G_2$$

sind, läßt sich so beweisen: Es ist für irgend eine Grundform φ von f nach *Aronhold* (dieses Journal, Bd. 55, S. 173 f.)

$$(\delta\varphi)_{x\lambda} = G_2 \frac{\partial \varphi(x\lambda)}{\partial x} - G_1 \frac{\partial \varphi_{x\lambda}}{\partial \lambda} *).$$

Wenn speziell φ durch

$$\begin{aligned} T &= f(y_1, y_2, \ldots) \cdot \Delta(z_1, z_2, \ldots) - f(z_1, z_2, \ldots)\, \Delta(y_1, y_2, \ldots) \\ &= \quad f(y) \cdot \Delta(z) \qquad\qquad - f(z) \cdot \Delta(y) \end{aligned}$$

(y_x und z_x willkürliche Konstanten), ersetzt wird, so ist offenbar wegen $\delta\Delta = mS \cdot f \quad \delta T = 0$ und $(\delta T)_{x\lambda} = 0$, während gleichzeitig

$$(T_{x\lambda}) = \begin{vmatrix} x f(y) - \lambda \Delta(y) & x f(z) - \lambda \Delta(z) \\ G_2 f(y) + G_1 \Delta(y) & G_2 f(z) + G_1 \Delta(z) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f(y) & \Delta(y) \\ f(z) & \Delta(z) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & -\lambda \\ G_2 & G_1 \end{vmatrix} = T(xG_1 + \lambda G_2) = TG$$

und

$$(\partial T)_{x\lambda} = T\left\{G_1 \frac{\partial G}{\partial \lambda} - G_2 \frac{\partial G}{\partial x}\right\} \equiv 0.$$

Da bei passender Bestimmung von $y_1, y_2, \ldots z_1, z_2, \ldots$ T stets von Null verschieden angenommen werden kann, so hat man

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} G_1 - \frac{\partial G}{\partial x} G_2 = 0 \quad \text{und gleichzeitig}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} \lambda + \frac{\partial G}{\partial x} x = (m+1)\, G$$

nach dem *Euler*schen Theorem über homogene Funktionen.

Durch Auflösung nach $\frac{\partial G}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial G}{\partial x}$ entsteht so das zu beweisende Theorem I

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = (m+1)\, G_2, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = (m+1)\, G_1.$$

---

*) Bezeichnet man $xa - \lambda\alpha$, $xb - \lambda\beta$, $xc - \lambda\gamma, \ldots$ kürzer mit $A, B, C, \ldots$, so ist $\varphi_{x\lambda} = \varphi_{xf - \lambda\Delta} = \varphi(A, B, C, \ldots)$ und

$$\begin{aligned} (\delta\varphi)_{xf-\lambda\Delta} &= \varphi'(A) \cdot \alpha_{x\lambda} + \varphi'(B)\, \beta_{x\lambda} + \varphi'(C) \cdot \gamma_{x\lambda} + \cdots \\ &= \varphi'(A)\{G_1\alpha + G_2 a\} + \varphi'(B)\{G_1\beta + G_2 b\} + \varphi'(C)\{G_1\gamma + G_2 c\} + \cdots \\ &= G_1\{\alpha\varphi'(A) + \beta\varphi'(B) + \cdots\} + G_2\{a\varphi'(A) + b\varphi'(B) + \cdots\} \end{aligned}$$

oder wegen

$$\frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial x} = \varphi'(A) \cdot a + \varphi'(B) \cdot b + \cdots, \quad -\frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial \lambda} = \varphi'(A) \cdot \alpha + \varphi'(B) \cdot \beta + \cdots :$$

$$(\delta\varphi)_{x\lambda} = G_2 \frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial x} - G_1 \frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial \lambda}.$$

Ad II. Transformiert man $T_{\mu\nu} = TG(\mu, \nu)$ (μ und ν beliebige Konstanten) durch die obige Substitution (S) (vgl. auch meine Arbeit Math. Ann., Bd. IV, S. 165, Gl. 10), so entsteht nach der Polarentheorie der binären Formen

$$T_{\mu\nu} = T\left\{\varrho^{m+1} G(x, \lambda) - \binom{m+1}{1}\varrho^m \sigma G'(x, \lambda) + \binom{m}{2}\varrho^{m-1}\sigma^2 G''(x, \lambda) - \cdots\right\},$$

worin

$$G'(x, \lambda) = G_1(x, \lambda)\, G_2 - G_2(x, \lambda)\, G_1 \equiv 0,$$
$$G''(x, \lambda) = G_{11}(x, \lambda) G_2^2 - 2G_{12}(x, \lambda) G_2 G_1 + G_{22}(x, \lambda) G_1^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Andererseits hat man

$$\mu f - \nu \Delta = \varrho(xf - \lambda\Delta) - \sigma\Delta_{xf-\lambda\Delta},$$

so daß $T_{\mu\nu}$ auch gleich dem Werte von $T_{\varrho\sigma} = TG(\varrho, \sigma)$, wenn man überall die Koeffizienten von f durch diejenigen von $xf - \lambda\Delta$ ersetzt. Es entsteht also wegen $T_{x\lambda} = TG(x, \lambda)$, nach Weghebung von T beiderseits, genau das Theorem II. Daß $G''(x, \lambda)$, $G'''(x, \lambda), \ldots$ sämtlich den Faktor $G(x, \lambda)$ besitzen, folgt auch aus der von *Hermite**) begründeten Theorie der assoziierten Kovarianten, welche Theorie auch die einfachste Berechnung der Größen $(G_2)_{xf-\lambda\Delta}$, $(G_3)_{xf-\lambda\Delta}, \ldots$ lehrt.

Ad III. Setzt man

$$G(\mu, \nu) = (\mu - \lambda'\nu)(\mu - \lambda''\nu)\cdots(\mu - \lambda^{(m+1)}\nu),$$

so wird für $\frac{\mu}{\nu} = \lambda'$:

$$\frac{\varrho}{\sigma} = \frac{\lambda' G_1 + G_2}{x - \lambda'\lambda}$$

gleich einer *ganzen* homogenen Funktion $(m-1)$-ten Grades von x und λ, da für $x = \lambda'$ und $\lambda = 1$

$$\lambda' G_1 + G_2 = \lambda' G_1(\lambda', 1) + G_2(\lambda', 1) = G(\lambda', 1) = 0.$$

Man weiß nun a priori aus II, daß der Wert $(\lambda')_{xf-\lambda\Delta}$ gleich einer der Größen $\frac{\varrho}{\sigma}$ aus der Reihe:

$$\frac{\lambda^{(i)} G_1 + G_2}{x - \lambda^{(i)}\lambda}\text{**)}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots m+1)$$

wird. Da für $x = 1, \lambda = 0$ $(\lambda')_{xf-\lambda\Delta}$ sich auf λ' reduziert und da die $\lambda', \lambda'', \ldots$ alle verschieden sein sollen, so wird in der Tat:

---

*) Dieses Journal, Bd. 52, S. 23 ff. = Oeuvres, publ. par *E. Picard*, Bd. 1, Paris 1905, S. 378.

**) Für $\varrho = 1$, $\sigma = 0$, $\mu = x$, $\nu = \lambda$ und $G(\mu, \nu) = G(x, \lambda)$.

$$\lambda'_{xf-\lambda\Delta} = \frac{\lambda' G_1 + G_2}{x - \lambda'\lambda}, \text{ und ähnlich}$$

$$\lambda''_{xf-\lambda\Delta} = \frac{\lambda'' G_1 + G_2}{x - \lambda''\lambda}, \ldots .$$

Ad IV. Aus dem zuletzt berechneten Werte von $\lambda'_{x\lambda}$ folgt die in x und λ identische Gleichung:

$$\lambda'_{x\lambda}(x - \lambda'\lambda) = \lambda' G_1 + G_2 \text{ oder diese andere:}$$

$$\lambda'_{x\lambda} x - G_2 = \lambda'(G_1 + \lambda'_{x\lambda}\lambda).$$

Daher wird

$$\begin{aligned}(\Delta - \lambda' f)_{xf-\lambda\Delta} &= (\Delta G_1 + f G_2) - \lambda'_{x\lambda}(xf - \lambda\Delta) \\ &= \Delta(G_1 + \lambda'_{x\lambda}\lambda) - f(x\lambda'_{x\lambda} - G_2) \\ &= (G_1 + \lambda'_{x\lambda}\lambda)(\Delta - \lambda' f) \qquad \text{q. e. d.}\end{aligned}$$

Der hier rechts auftretende Faktor $G_1 + \lambda'_{x\lambda}\lambda$ ist nichts anderes als $(x - \lambda''\lambda)(x - \lambda'''\lambda)\cdots(x - \lambda^{(m+1)}\lambda)$, so daß:

$$(\Delta - \lambda' f)_{xf-\lambda\Delta} = (\Delta - \lambda' f)(x - \lambda''\lambda)(x - \lambda'''\lambda)\cdots(x - \lambda^{(m+1)}\lambda),$$

$$(\Delta - \lambda'' f)_{xf-\lambda\Delta} = (\Delta - \lambda'' f)(x - \lambda'\lambda)(x - \lambda'''\lambda)\cdots(x - \lambda^{(m+1)}\lambda),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Da in der Tat die Gleichungen

$$x \cdot \lambda'_{x\lambda} - G_2 = 0 \quad \text{und} \quad G_1 + \lambda \cdot \lambda'_{x\lambda} = 0$$

dieselben Wurzeln besitzen, so kann man an ihrer Stelle auch die Gleichung

$$(x \cdot \lambda'_{x\lambda} - G_2) - (G_1 + \lambda'_{x\lambda}\lambda)\lambda^{(i)} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots m+1)$$

setzen, oder in anderer Anordnung

$$(x - \lambda^{(i)}\lambda)\lambda'_{x\lambda} - (\lambda^{(i)} G_1 + G_2) = 0.$$

Diese Gleichung wird durch $\frac{x}{\lambda} = \lambda^i$ $(i = 2, 3, \ldots m+1)$ befriedigt, da links der erste Summand wegen des Faktors $x - \lambda^{(i)}\lambda$ und der zweite Summand wegen $\lambda^{(i)} G_1(\lambda^{(i)}, 1) + G_2(\lambda^{(i)}, 1) \equiv G(\lambda^{(i)}, 1)$ verschwindet.

Über einen Satz des Herrn *Fatou*.

Von Herrn *Marcel Riesz* in Györ.

Herr *Fatou* hat einen äußerst bemerkenswerten Satz über Potenzreihen aufgestellt*), den wir unten wiedergeben. Der Satz ist von sehr einfacher Form, jedoch beruht der *Fatou*sche Beweis auf einem tiefliegenden und schwierigen *Riemann*schen Satze über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine konvergente trigonometrische Reihe.

Diesen *Fatou*schen Satz habe ich nach verschiedenen Richtungen erweitert. Einerseits habe ich in meiner Inauguraldissertation**), wo ich die Summierbarkeit durch arithmetische Mittel untersuche, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Summierbarkeit einer Potenzreihe in jedem regulären Punkte des Einheitskreises entwickelt. Andererseits habe ich in einer vorläufigen Mitteilung***) einen Satz über *Dirichlet*sche Reihen aufgestellt, der auch den *Fatou*schen Satz umfaßt. Zum Beweise dieses Satzes bedarf ich nur elementarer Hilfsmittel aus der Funktionentheorie; ich mache von den *Riemann*schen Resultaten keinen Gebrauch und wende von seinen Kunstgriffen nur solche an, die mir im Beweisgange unumgänglich scheinen.

Ich teile hier den Beweis nur für den speziellen Fall der Potenzreihen mit, wo er sich besonders einfach gestaltet. Unsere Abschätzungen gestatten auch den *Fatou*schen Satz dahin zu ergänzen, daß die darin

*) *P. Fatou*: Séries trigonométriques et séries de *Taylor*. Acta Mathematica. Bd. 30 (S. 389).

**) Summierbare trigonometrische Reihen und Potenzreihen. (Ungarisch.) Budapest 1908.

***) Sur les séries de *Dirichlet* et les séries entières. Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences. Paris. (22 novembre 1909).

behauptete Konvergenz der Potenzreihe an den regulären Stellen des Einheitskreises, auf jedem Regularitätsbogen*) eine gleichmäßige ist.

Zugleich gebe ich die oben angedeutete Verallgemeinerung für arithmetische Mittel wieder.

Der *Fatou*sche Satz mit unserer Ergänzung lautet:

Satz I. Genügen die Koeffizienten einer Potenzreihe

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

der Bedingung

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0, \tag{1.}$$

so konvergiert die Potenzreihe an jeder regulären Stelle des Einheitskreises und zwar gleichmäßig an den Stellen eines Regularitätsbogens. Natürlich ist die Bedingung (1.) *auch notwendig, damit auf dem Einheitskreise wenigstens ein Konvergenzpunkt liegt.*

Wir setzen voraus, daß $z = 1$ eine reguläre Stelle der Funktion ist und beweisen zunächst, daß die Reihe für $z = 1$ konvergiert. (Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz wird sich nachher leicht ergeben.)

Es seien z_1 und z_2 die Endpunkte eines Regularitätsbogens, der die Stelle $z = 1$ enthält, und zwar liege z_1 in der oberen und z_2 in der unteren Halbebene. Es bedeute ferner C_1 einen außerhalb des Einheitskreises und C_2 einen innerhalb dieses Kreises gelegenen Kurvenzug, beide mit den Endpunkten z_1 und z_2. Sie seien noch so beschaffen, daß die geschlossene Kurve $C_1 + C_2$ die Stellen $z = 1$ und $z = 0$ einschließt und daß die Funktion $f(z)$ auf dieser Kurve $C_1 + C_2$ und in ihrem Innern regulär ist.

Man hat dann in der Umgebung des Nullpunktes die Entwickelung

$$\frac{f(z)}{1-z} = \sum_{x=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_x) z^x$$

und somit nach dem *Cauchy*schen Satze

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n - f(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+C_2} \frac{f(z)}{1-z} \frac{1}{z^{n+1}} dz. \tag{2.}$$

Wir beweisen zuerst die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(1-z)\, z^{n+1}} dz = 0. \tag{3.}$$

---

*) Ein Bogen des Einheitskreises heiße ein *Regularitätsbogen* der Funktion $f(z)$, wenn in allen seinen Punkten (die Endpunkte inbegriffen) die Funktion regulär ist.

Durch partielle Integration erhält man

$$(4.)\quad \int_{C_1} \frac{f(z)}{(1-z)z^{n+1}}dz = \frac{1}{n}\left(\frac{f(z_2)}{(1-z_2)z_2^n} - \frac{f(z_1)}{(1-z_1)z_1^n} + \int_{C_1} \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{1-z}\right)\frac{1}{z^n}dz\right).$$

Der absolute Betrag des Klammerausdruckes bleibt für jedes n unter einer endlichen Schranke, folglich konvergiert (4.) mit wachsendem n wirklich gegen Null.

Wir wollen nun auch die Gleichung

$$(5.)\quad \lim_{n=\infty} \int_{C_2} \frac{f(z)}{(1-z)z^{n+1}}dz = 0$$

begründen. Dazu verwandeln wir dieses Integral in eine unendliche Reihe von Integralen, die über einen Bogen des Einheitskreises erstreckt sind, und schätzen dann diese Reihe mittels der Bedingung $\lim_{n=\infty} a_n = 0$ ab.

Man kann nämlich immer eine lineare Funktion $c_0 + c_1 z$ finden derart, daß die Funktion

$$H(z) = \frac{1}{1-z} + c_0 + c_1 z$$

an den Stellen z_1 und z_2 verschwindet. Es besteht ferner die Gleichung

$$(6.)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1+C_2} \frac{f(z)(c_0+c_1 z)}{z^{n+1}}dz = a_{n-1}c_1 + a_n c_0, \qquad (n \geqq 1)$$

wo die rechte Seite infolge von (1.) mit wachsendem n gegen Null konvergiert. Andererseits folgert man, daß ebenso wie (3.) auch

$$(7.)\quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)(c_0+c_1 z)}{z^{n+1}}dz = 0$$

ist. Durch Subtraktion der Gleichung (7.) von (6.) ergibt sich, daß ebenfalls

$$(8.)\quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(z)(c_0+c_1 z)}{z^{n+1}}dz = \lim_{n=\infty} \int_{C_2} \frac{f(z)(c_0+c_1 z)}{z^{n+1}}dz = 0$$

ausfällt. Zeigen wir also, daß

$$(9.)\quad \lim_{n=\infty} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\left(\frac{1}{1-z} + c_0 + c_1 z\right)dz = \lim_{n=\infty} \int_{C_2} \frac{f(z)H(z)}{z^{n+1}}dz = 0$$

ist, so wird damit auch (5.) bewiesen.

Wir betrachten nun die Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{a_\varkappa}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)} z^{\varkappa+2}.$$

Diese Reihe konvergiert im Innern des Einheitskreises und am Rande unbedingt und *gleichmäßig.* Ferner besteht im Innern des Kreises und auch an den Stellen z_1 und z_2 die Gleichung

$$F''(z) = f(z).$$

Man erhält also, da $H(z)$ an den Stellen z_1 und z_2 verschwindet, durch wiederholte partielle Integration die Umformung*)

$$(10.)\qquad \int_{C_2} f(z)\frac{H(z)}{z^{n+1}}\,dz = \int_{C_2} F(z)\frac{d^2}{dz^2}\Big(\frac{H(z)}{z^{n+1}}\Big)dz - \Big[F(z)\frac{d}{dz}\Big(\frac{H(z)}{z^{n+1}}\Big)\Big]_{z_2}^{z_1}$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa\left(\int_{C_2}\frac{z^{\varkappa+2}}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}\frac{d^2}{dz^2}\Big(\frac{H(z)}{z^{n+1}}\Big)dz - \Big[\frac{z^{\varkappa+2}}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}\frac{d}{dz}\Big(\frac{H(z)}{z^{n+1}}\Big)\Big]_{z_2}^{z_1}\right)$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \int_{C_2} z^\varkappa \frac{H(z)}{z^{n+1}}\,dz = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \int_{C_2} z^{\varkappa-n-1}H(z)\,dz.$$

Statt die einzelnen Integrationen längs C_2 auszuführen, kann man auch nach dem *Cauchy*schen Satze auf jenem Bogen $(z_1 z_2)$ des Einheitskreises, der die Stelle $z=1$ nicht enthält, integrieren, d. h.

$$(11.)\qquad \int_{C_2} f(z)\frac{H(z)}{z^{n+1}}\,dz = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \int_{z_1}^{z_2} z^{\varkappa-n-1}H(z)\,dz.$$

Damit sind wir aber gleich am Ziele. Denn wir haben zunächst für alle Werte von $\varkappa$ die Ungleichung

$$(12.)\qquad \left|\int_{z_1}^{z_2} z^{\varkappa-n-1}H(z)\,dz\right| < G$$

und durch zweimalige partielle Integration die Ungleichung

$$(13.)\qquad \left|\int_{z_1}^{z_2} z^{\varkappa-n-1}H(z)\,dz\right| = \left|\int_{z_1}^{z_2}\frac{z^{\varkappa-n}}{\varkappa-n}H'(z)\,dz\right|$$

$$= \left|\Big[\frac{z^{\varkappa-n+1}}{(\varkappa-n)(\varkappa-n+1)}H'(z)\Big]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2}\frac{z^{\varkappa-n+1}}{(\varkappa-n)(\varkappa-n+1)}H''(z)\,dz\right| < \frac{G}{|\varkappa-n|\,|\varkappa-n+1|},$$

wo G eine nur von den Stellen z_1 und z_2 abhängige, also von n und $\varkappa$ unabhängige Zahl bedeutet. Für $\varkappa = n-1$ und $\varkappa = n$ wenden wir die erste, für alle übrigen Zahlen die zweite Ungleichung an.

Wie klein auch die positive Größe ε gewählt sei, können wir laut (1.) eine Zahl m so angeben, daß für jedes $\varkappa > m$

$$(14.)\qquad |a_\varkappa| < \varepsilon$$

ist. Ist dann noch

$$n-2 > m,$$

so haben wir infolge der Ungleichungen (12.), (13.) und (14.) die neue Ungleichung

$$\left|\sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \int_{z_1}^{z_2} z^{\varkappa-n-1}H(z)\,dz\right| < G\Big(\sum_{\varkappa=0}^{m}\frac{|a_\varkappa|}{(\varkappa-n)(\varkappa-n+1)} + \varepsilon\sum_{\varkappa=m+1}^{n-2}\frac{1}{(\varkappa-n)(\varkappa-n+1)}$$

*) Dieses Verfahren kann man in verschiedenen Fragen über trigonometrische Reihen nutzbar machen. Es kann z. B. zum Beweise des von *Fatou* verwendeten *Riemann*schen Satzes dienen.

$$+ 2\varepsilon + \varepsilon \sum_{\varkappa=n+1}^{\infty} \frac{1}{(\varkappa - n)(\varkappa - n + 1)}\Big).$$

Die erste Summe ist aber

$$\leqq \frac{\sum_{\varkappa=0}^{m} |a_\varkappa|}{(n-m)(n-m+1)}$$

und wird mithin, wenn n genügend groß gewählt wird, auch $< \varepsilon$. Die beiden anderen Summen sind resp. $\leqq 1$. Also wird

$$(15.) \qquad \left| \int_{C_2} \frac{f(z) H(z)}{z^{n+1}} dz \right| = \left| \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \int_{z_1}^{z_2} z^{\varkappa - n - 1} H(z)\, dz \right| < 5 G \varepsilon ,$$

wenn nur n eine gewisse, von ε abhängige Größe überschreitet. In dieser Ungleichung liegt eben der Beweis von (5.). Aus (2.), (3.) und (5.) folgt dann unmittelbar

$$\lim_{n=\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = f(1).$$

Wir wollen noch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz auf einem beliebigen Regularitätsbogen beweisen. Es sei $(z_1' z_2')$ ein Bogen, der im Bogen $(z_1 z_2)$ enthalten ist. Es genügt dann zu zeigen, daß die Reihe an den Stellen des Bogens $(z_1' z_2')$ gleichmäßig konvergiert, da jeder Regularitätsbogen in einem größeren enthalten ist.

Es bedeute nun x eine beliebige Stelle des Bogens $(z_1' z_2')$. Wir haben dann die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 + C_2} \frac{f(z)}{(x-z)} \left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} dz = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n - f(x).$$

Das Integral über C_1 konvergiert, wie leicht ersichtlich, mit wachsendem n gleichmäßig gegen Null für jede Stelle x des Bogens $(z_1' z_2')$. Ferner bestimmen wir die lineare Funktion $c_0 + c_1 z$ so, daß

$$H(z) = \frac{1}{x - z} + c_0 + c_1 z$$

an den Stellen z_1 und z_2 verschwindet. Man hat die Werte

$$c_0 = \frac{z_1 + z_2 - x}{(z_1 - x)(z_2 - x)}, \quad c_1 = \frac{1}{(z_1 - x)(z_2 - x)},$$

die zwischen endlichen Grenzen bleiben, wenn x sich auf dem Bogen $(z_1' z_2')$ bewegt. Folglich bleibt die der Zahl G [in (12.) und (13.)] entsprechende Zahl auch zwischen endlichen Grenzen, womit unsere Behauptung über die Gleichmäßigkeit der Konvergenz völlig bewiesen ist.

Satz II. Genügen die Koeffizienten einer Potenzreihe

$$(16.) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

der Bedingung

(17.) $$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^\gamma} = 0 \quad (\gamma \geqq 0),$$

so ist die Reihe an jeder regulären Stelle x des Einheitskreises durch arithmetische Mittel γ-ter Ordnung summierbar und zwar gleichmäßig an den Stellen eines Regularitätsbogens. Die Bedingung (17.) *ist auch notwendig, damit auf dem Einheitskreise wenigstens eine Stelle liegt, wo die Reihe durch arithmetische Mittel γ-ter Ordnung summierbar ist.*

Der Beweis der Notwendigkeit der Bedingung (17.) ist sehr leicht zu führen, so daß wir auf ihn gar nicht eingehen. Daß diese Bedingung auch hinreichend ist, kann, wenn γ eine ganze Zahl ist, vollständig ähnlich bewiesen werden, wie oben die Konvergenz. Der einzige Unterschied besteht in der Bildung von $H(z)$, indem man zu $\frac{1}{x-z}$ statt eines linearen Ausdruckes ein Polynom $(2\gamma+1)$-ter Ordnung addiert, womit man bewirken kann, daß an den Stellen z_1 und z_2 nicht nur $H(z)$, sondern auch seine Ableitungen bis zur γ-ten Ordnung verschwinden.

Ist aber γ keine ganze Zahl, so darf man, wie aus der Formel (22.) unmittelbar ersichtlich, nur über solche Kurven integrieren, welche die Stelle $z = x$ nicht einschließen. Ein Teil unseres obigen Beweises muß also durch einen neuen Beweisgang ersetzt werden, welcher aber uns gleich erlaubt, statt Satz II. den folgenden allgemeineren Satz zu begründen.

Satz III. Es sei

(18.) $$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

eine Potenzreihe, deren Koeffizienten der Bedingung

(19.) $$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^\gamma} = 0 \quad (\gamma > 0)\ ^*)$$

*) Bekanntlich wurde die Tatsache, daß unter gewissen Stetigkeitsbedingungen die ersten arithmetischen Mittel der *Fourier*schen Partialsummen einer Funktion konvergieren, von *Fejér* erkannt. Unser obiges Ergebnis, auf trigonometrische Reihen übertragen, kann auch als eine Erweiterung des *Fejér*schen Resultates erkannt werden.

Im Falle $\gamma = 0$, also im Falle der gewöhnlichen Konvergenz, wurde die Frage nach der Richtigkeit unseres Satzes III schon von *Pringsheim* gestellt. *Fejér* gab darauf eine negative Antwort, indem er eine im Innern und am Rande des Einheitskreises beschränkte und stetige Funktion angab, deren *Maclaurin*sche Entwicklung auf dem Rande in einer überall dichten Punktmenge divergiert (Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Sitzungsber. d. math.-phys. Kl. d. Kgl. Bayr. Akad. 1910). Will man bei $\gamma = 0$ die Regularität der betreffenden Stelle fallen lassen und dennoch die Konvergenz sichern, so muß man statt Stetigkeit vielmehr solche Einschränkungen treffen, wie in der Konvergenztheorie der *Fourier*schen Reihen.

genügen. Es sei ferner $(z_1 z_2)$ *ein Bogen des Einheitskreises von der Beschaffenheit, daß die Funktion* $f(z)$ *gleichmäßig einer Grenzfunktion zustrebt, wenn* z *sich vom Innern des Kreises längs der entsprechenden Radien den Stellen des Bogens* $(z_1 z_2)$ *nähert. Die Reihe* (18.) *ist unter diesen Bedingungen an jeder inneren Stelle des Bogens* $(z_1 z_2)$ *durch arithmetische Mittel* γ*-ter Ordnung summierbar und zwar gleichmäßig auf jedem Bogen* $(z_1' z_2')$, *der in* $(z_1 z_2)$ *enthalten ist.*

Der Einfachheit halber setzen wir wieder voraus, daß $z = 1$ ein innerer Punkt des Bogens $(z_1 z_2)$ sei, und beweisen dann, daß die Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

durch die arithmetischen Mittel γ-ter Ordnung summierbar ist.

Die Definition dieser Mittel lautet bekanntlich nach *Cesàro* folgendermaßen: Man setze

$$\left(\frac{1}{1-y}\right)^{\gamma+1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\gamma)} y^n$$

und

$$\left(\frac{1}{1-y}\right)^{\gamma+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(\gamma)} y^n \tag{20.}$$

und bilde ferner den Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}}. \tag{21.}$$

Existiert dieser Grenzwert, so nennen wir die Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

durch arithmetische Mittel γ-ter Ordnung summierbar und bezeichnen (21.) als ihre Summe*).

Es sei C_1' ein Kurvenzug, der die Punkte z_1 und z_2 im Innern des Einheitskreises verbindend in der Nachbarschaft des Kreisbogens $(z_2\ 1\ z_1)$ verläuft. Der Kurvenzug C_2 sei wieder wie oben definiert. Dann haben wir infolge der Formel (20.)

$$\frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}} = \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{C_1'+C_2} \frac{f(z)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}}\, dz. \tag{22.}$$

Jetzt beweisen wir zuerst, daß

---

*) Für nicht ganze Ordnungszahl tritt meines Wissens diese Definition zuerst bei *Hadamard* auf (Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de *Taylor*. Thèse, Paris 1892, p. 82). Vgl. auch: *Knopp*, Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. Inauguraldiss. (Berlin 1907), S. 17 u. ff.

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{C_n^{(\gamma)}} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz = 0 \tag{23.}$$

ist. Der Gedankengang ist mit dem früheren im wesentlichen identisch. Es sei z. B.

$$0 < \gamma \leqq 1. \tag{24.}$$

Wir bestimmen dann ein Polynom dritten Grades

$$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3$$

derart, daß die Funktion

$$H(z) = \frac{1}{(1-z)^{\gamma+1}} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3$$

in den Punkten z_1 und z_2 samt ihrer ersten Ableitung verschwindet. Diese Bedingung ergibt für die Werte c vier lineare Gleichungen, die, wie leicht ersichtlich, einander nicht widersprechen und die Werte c eindeutig bestimmen. Man beweist dann genau wie vorher, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{C_n^{(\gamma)}} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z^{n+1}} (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3) dz = 0 \tag{25.}$$

ausfällt. Zeigen wir also noch, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{C_n^{(\gamma)}} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z^{n+1}} H(z) dz = 0 \tag{26.}$$

ist, so wird damit infolge von (24.) auch (23.) bewiesen.

Wir können aber mittels der Reihe

$$F(z) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \frac{z^{\varkappa+3}}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)(\varkappa+3)},$$

die laut (19.) und (24.) im Innern und am Rande des Einheitskreises gleichmäßig konvergiert, wieder die Umformung

$$\int_{C_2} f(z) \frac{H(z)}{z^{n+1}} dz = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \int_{C_2} z^\varkappa \frac{H(z)}{z^{n+1}} dz = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \int_{C_2} z^{\varkappa-n-1} H(z) dz \tag{27.}$$

rechtfertigen. In diesen Integrationen kann aber der Kurvenzug C_2 wieder durch jenen Kreisbogen $(z_1 z_2)$, der den Punkt $z = 1$ nicht enthält, ersetzt werden, d. h.

$$\int_{C_2} f(z) \frac{H(z)}{z^{n+1}} dz = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \int_{z_1}^{z_2} z^{\varkappa-n-1} H(z) dz. \tag{28.}$$

Wir haben wieder zunächst

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} z^{\varkappa-n-1} H(z) dz \right| < G, \tag{29.}$$

ferner durch dreimalige partielle Integration

$$(30.)\qquad \left|\int_{z_1}^{z_2} z^{\varkappa-n-1} H(z)\,dz\right| < \frac{G}{|\varkappa-n|\,|\varkappa-n+1|\,|\varkappa-n+2|},$$

wo G wieder von $\varkappa$ und n unabhängig ist. Die erste Ungleichung wenden wir für $\varkappa = n-2$, $\varkappa = n-1$ und $\varkappa = n$ an, die zweite für alle übrigen Zahlen.

Wir bestimmen nun die positive ganze Zahl m so, daß für jedes $\varkappa > m$

$$(31.)\qquad \left|\frac{a_\varkappa}{\varkappa^\gamma}\right| < \varepsilon,$$

wo ε eine beliebig klein gewählte positive Größe ist. Wenn noch

$$n-3 > m,$$

so haben wir zufolge der Ungleichungen (29.), (30.) und (31.) die neue Ungleichung

$$(32.)\quad \left|\frac{1}{C_n^{(\gamma)}}\sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \int_{z_1}^{z_2} z^{\varkappa-n-1} H(z)\,dz\right| < \frac{G}{C_n^{(\gamma)}}\Big(\sum_{\varkappa=0}^{m}\frac{|a_\varkappa|}{(n-\varkappa)(n-1-\varkappa)(n-2-\varkappa)}$$
$$+ \varepsilon n^\gamma \sum_{\varkappa=m+1}^{n-3}\frac{1}{(n-\varkappa)(n-1-\varkappa)(n-2-\varkappa)}$$
$$+ 3\varepsilon n^\gamma + \varepsilon \sum_{\varkappa=n+1}^{2n}\frac{\varkappa^\gamma}{(\varkappa-n)(\varkappa-n+1)(\varkappa-n+2)}$$
$$+ \varepsilon \sum_{\varkappa=2n+1}^{\infty}\frac{\varkappa^\gamma}{(\varkappa-n)(\varkappa-n+1)(\varkappa-n+2)}\Big).$$

Die erste Summe wird aber, da sie aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, mit genügend großem n kleiner als ε. Die zweite Summe ist kleiner als $\frac{1}{4}$. Die dritte Summe ist kleiner als $\frac{(2n)^\gamma}{4}$. Die vierte Summe ist, da $\gamma \leqq 1$ und mithin in ihr $\frac{\varkappa^\gamma}{(\varkappa-n+2)} < 2$ ausfällt, kleiner als

$$2\sum_{\varkappa=2n+1}^{\infty}\frac{1}{(\varkappa-n)(\varkappa-n+1)} < 2.$$

Also wird endlich bei genügend großem n

$$(33.)\quad \frac{1}{C_n^{(\gamma)}}\left|\int_{C_2}\frac{f(z)\,H(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| = \left|\frac{1}{C_n^{(\gamma)}}\sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \int_{z_1}^{z_2} z^{\varkappa-n-1} H(z)\,dz\right|$$
$$< \frac{G}{C_n^{(\gamma)}}\Big(\varepsilon + \frac{\varepsilon n^\gamma}{4} + 3\varepsilon n^\gamma + \varepsilon n^\gamma + 2\varepsilon\Big).$$

Da ferner

$$\lim_{n=\infty}\frac{n^\gamma}{C_n^{(\gamma)}} = \Gamma(\gamma+1)$$

eine endliche Zahl ist, so wird der letzte Ausdruck bei genügend großem n kleiner als eine beliebig klein vorgeschriebene positive Zahl, womit (23.) vollständig bewiesen ist.

Wir müssen noch die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{C_1'} \frac{f(z)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz = f(1) \tag{34.}$$

darlegen. Dazu bestimmen wir auf dem Bogen $(z_2\ 1)$ den Punkt ξ_2 und auf dem Bogen $(1\ z_1)$ den Punkt ξ_1 derart, daß auf dem Rande*) und im Innern des Einheitskreises

$$|f(z) - f(1)| < \varepsilon\,, \tag{35.}$$

sobald

$$|z-1| < |\xi_1 - 1| = |\xi_2 - 1|,$$

wo ε eine beliebige positive Größe bedeutet. Man kann ferner bei genügend großem n auf dem Bogen $(\xi_2\ 1)$ bzw. auf dem Bogen $(1\ \xi_1)$ die Punkte ν_2 und ν_1 so bestimmen, daß

$$|\nu_1 - 1| = |\nu_2 - 1| = \frac{1}{n}\,. \tag{36.}$$

Wir beschreiben dann um den Mittelpunkt $z=1$ mit dem Radius $\frac{1}{n}$ einen Kreisbogen B, der im Innern des Einheitskreises die Punkte $z=\nu_1$ und $z=\nu_2$ verbindet, und bezeichnen den aus den Kreisbögen $(z_2 \xi_2 \nu_2)$, B und $(\nu_1 \xi_1 z_1)$ gebildeten Kurvenzug mit C_1''. Offenbar kann das Integral über C_1' durch das Integral über C_1'' ersetzt werden. D. h.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{C_1'} \frac{f(z)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz &= \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{C_1''} \frac{f(z)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz \\
&= \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{C_1''} \frac{f(z)-f(1)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz + \frac{f(1)}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{C_1''} \frac{1}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz \\
&= \frac{f(1)}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{C_1''} \frac{1}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz + \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{z_2}^{\nu_2} \frac{f(z)-f(1)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz \\
&+ \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{B} \frac{f(z)-f(1)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz + \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{\nu_1}^{z_1} \frac{f(z)-f(1)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz.
\end{aligned} \tag{37.}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{C_1''} \frac{1}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz &= \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{C_1''+c_2} \frac{1}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz \\
&- \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{c_2} \frac{1}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz = 1 - \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{c_2} \frac{1}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz.
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck konvergiert, wie leicht ersichtlich, mit wachsendem n gegen Null, mithin ist

*) Wir bezeichnen auch die Randfunktion, wo sie existiert, mit $f(z)$.

$$\text{(38.)} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{f(1)}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{C_1'} \frac{1}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz = f(1).$$

Andererseits ist

$$\left| \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{z_2}^{\nu_2} \frac{f(z)-f(1)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz \right| \leqq \left| \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{z_2}^{\xi_2} \frac{f(z)-f(1)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz \right| + \left| \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{\xi_2}^{\nu_2} \frac{f(z)-f(1)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz \right|.$$

Ferner hat man, da die Integrationsgrenzen von n unabhängig sind,

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{z_2}^{\xi_2} \frac{f(z)-f(1)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz \right| = 0.$$

Um das zweite Integral abzuschätzen, setzen wir

$$z = e^{i\varphi}, \quad \xi_2 = e^{i\tau}, \quad \nu_2 = e^{i\theta}.$$

Dann ist

$$|1-z| = \left| 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right| > \left| \frac{\varphi}{2} \right|,$$

also infolge von (35.)

$$\text{(40.)} \qquad \left| \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{\xi_2}^{\nu_2} \frac{f(z)-f(1)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz \right| < \frac{\varepsilon}{2\, C_n^{(\gamma)} \pi} \int_{\tau}^{\theta} \frac{d\varphi}{\left| \frac{\varphi}{2} \right|^{\gamma+1}}$$

$$< \frac{\varepsilon\, 2^{\gamma+1}}{\gamma\, 2 C_n^{(\gamma)} \pi} \frac{1}{|\theta|^{\gamma}} < \frac{\varepsilon\, 2^{\gamma+1}}{2\gamma\, C_n^{(\gamma)} \pi} n^{\gamma} < g\varepsilon,$$

wo g eine von n unabhängige endliche positive Zahl bedeutet. Ähnliche Abschätzungen wie (39.) und (40.) bestehen auch für das von ν_1 bis z_1 erstreckte Integral.

Endlich ist

$$\left| \frac{1}{C_n^{(\gamma)} 2\pi i} \int_{B} \frac{f(z)-f(1)}{(1-z)^{\gamma+1} z^{n+1}} dz \right| < \frac{\varepsilon}{C_n^{(\gamma)} 2\pi} n^{\gamma+1} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \frac{2\pi}{n}$$

$$< \frac{8\varepsilon n^{\gamma+1} 2\pi}{C_n^{(\gamma)} 2\pi n} = \frac{8\varepsilon n^{\gamma}}{C_n^{(\gamma)}} < 8g\varepsilon.$$

Diese Abschätzungen und die Gleichungen (37.) und (38.) ergeben aber die Richtigkeit von (34).

Die in unserem Satze behauptete *gleichmäßige Summierbarkeit* beruht auf der Tatsache, daß jede in einer abgeschlossenen Punktmenge stetige Funktion daselbst *gleichmäßig stetig* ist.

Eine leichte Umformung unseres Beweises ergibt statt Satz III einen allgemeineren Satz, der sich in meiner zitierten „Comptes Rendus"-Mitteilung findet.

Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken.

Von Herrn *Leon Lichtenstein* in Berlin.

Die konforme Abbildung eines von einer endlichen Anzahl Stücke analytischer Linien begrenzten einfach zusammenhängenden Gebietes ohne Spitzen auf den Einheitskreis läßt sich, wie folgt, durchführen. Man beweist zunächst nach einer der bekannten Methoden für die Auflösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie die Existenz der zu dem betrachteten Gebiete gehörigen *Green*schen Funktion G. Sodann wird die komplementäre Potentialfunktion H gebildet und es wird gezeigt, daß die Funktion $F(z) = e^{G+iH}$ sich in den Ecken stetig verhält und eine die Abbildung vermittelnde Funktion darstellt. Die Ableitung $\frac{dF(z)}{dz}$ ist im Innern und auf dem Rande des Gebietes, die Ecken ausgenommen, stetig und von Null verschieden. Über das Verhalten von $\frac{dF(z)}{dz}$ in der Nachbarschaft der Ecken sagt keine der üblichen Methoden zunächst etwas aus. Dieses Verhalten muß man indessen kennen, wenn man das zweite und namentlich das dritte Randwertproblem der Potentialtheorie für ebene Gebiete mit Ecken auflösen will. Auch bei der Behandlung der Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$\text{(1.)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

müssen die Werte der Ableitung $\frac{dF(z)}{dz}$ in der Nachbarschaft der Ecken betrachtet werden.

Bekanntlich läßt sich die Bestimmung einer im Innern eines von stetig gekrümmten Kurven begrenzten Gebietes regulären Potentialfunktion mit vorgeschriebenen Randwerten auf die Auflösung einer der *Fredholm*schen Methode zugänglichen Integralgleichung zurückführen. Dieses Ver-

fahren ergibt für die gesuchte Lösung einen verhältnismäßig einfachen expliziten Ausdruck und macht schwierige Konvergenzbetrachtungen entbehrlich. Einen ähnlichen Fortschritt für die Gebiete mit Ecken zu erreichen, war bis jetzt nicht gelungen.

Ein sehr einfaches Verfahren, welches die konforme Abbildung ebener Gebiete mit Ecken und die Auflösung der drei Randwertaufgaben der Potentialtheorie für diese Gebiete auf die Auflösung der der *Fredholm*schen Methode zugänglichen Integralgleichungen zurückzuführen gestattet, soll in den folgenden Ausführungen mitgeteilt werden. Dieses Verfahren gibt überdies Aufschluß über das Verhalten der Ableitung der die Abbildung vermittelnden Funktion $F(z)$ in der Nähe der Ecken. *Ist $\alpha\pi$ der von zwei Nachbarseiten der Begrenzung im Koordinatenursprung eingeschlossene Winkel, so ist in der Umgebung der Ecke*

$$\frac{dF(z)}{dz} = z^{\frac{1}{\alpha}-1} \times \textit{stet. Funktion.}$$

Diese Beziehung ist, wie es scheint, bis jetzt nur in dem speziellen Falle einer von Kreisbogen gebildeten Ecke, oder einer Ecke, die sich durch Vermittelung einer regulären analytischen Funktion auf die vorerwähnte zurückführen läßt, bewiesen worden.

Ich bemerke zum Schluß, daß das in der vorliegenden Arbeit angegebene Verfahren nur anwendbar ist, wenn die Randkurven aus Stücken regulär analytischer Linien bestehen. Demgegenüber führt z. B. die Methode von *Neumann-Zaremba* zum Ziele, wenn das betrachtete Gebiet keine Spitzen hat und seine Randkurven etwa abteilungsweise stetige Tangente und Krümmung haben*). Die Beschränkung auf analytische Kurven erscheint indessen im allgemeinen nicht als wesentlich. Sie wird überdies, wie ich hoffe, durch die besonderen Vorteile meiner Methode, die ein tieferes Eindringen in das Wesen der in den Ecken vorhandenen Singularität gestattet, aufgewogen.

Kapitel I. Konforme Abbildung ebener Gebiete mit Ecken.

§ 1.

Es sei S eine geschlossene, sich selbst weder durchschneidende, noch berührende Kurve mit stetiger Tangente in der Ebene der Variablen (x, y).

*) Vgl. *S. Zaremba*, Les fonctions fondamentales de M. *Poincaré* et la méthode de *Neumann* pour une frontière composée de polygones curvilignes, Journal de Mathématiques, V. Sér., T. X (1904), p. 395—444. (Siehe die Fußnote auf S. 112).

Es sei σ die Länge irgendeines zusammenhängenden Teiles der Begrenzungskurve, θ der Winkel der beiden in den Endpunkten von σ errichteten Normalen von S. Ist $\theta < C\sigma$, worin C eine gewisse Konstante bedeutet, so kann das von S begrenzte endliche Gebiet T durch Vermittelung einer in T und auf S stetigen Funktion $\Theta(z)$ auf den Einheitskreis konform abgebildet werden. *Die Ableitung* $\frac{d\Theta(z)}{dz}$ *ist noch auf dem Rande des Gebietes stetig und von Null verschieden.*

Dieser Satz wird als bekannt vorausgesetzt.

In der Ebene der Variablen (x, y) mögen zwei sich im Koordinatenursprung schneidende analytisch reguläre Kurvenstücke

$$x = t,\ y = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots \qquad (S_1) \tag{2.}$$

und

$$x = t,\ y = b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots \qquad (S_2) \tag{3.}$$

gegeben sein. Die unendlichen Reihen (2.) und (3.), deren Koeffizienten alle reell sind, mögen im Innern eines Kreises vom Radius $t_0 > 0$ um den Koordinatenursprung unbedingt und im gleichen Grade konvergieren. Es sei $\alpha\pi$ irgendeiner der von den Kurven S_1 und S_2 eingeschlossenen Winkel. Wir setzen $z = x + iy$ und beweisen folgenden Hilfssatz:

Man kann stets durch Vermittelung einer passend gewählten ganzen rationalen Funktion

$$Z = z + A_2 z^2 + \cdots + A_m z^m \tag{4.}$$

die Kurven S_1 und S_2 auf ein Paar von Kurven S_1' und S_2' abbilden, die mit den zugehörigen Scheiteltangenten Berührung m-ter Ordnung haben. Ist die Zahl α rational und gleich $\frac{p}{q}$ (die Zahlen p und q relativ prim), so kann m höchstens gleich q gewählt werden. Ist α irrational, so bleibt m beliebig).*

Durch Vermittelung der Funktion (4.) wird die Kurve S_1 auf eine Kurve S_1' abgebildet, deren Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} X + iY = {} & (1 + a_1 i)t + a_2 i t^2 + a_3 i t^3 + \cdots \\ & + A_2[(1 + a_1 i)t + a_2 i t^2 + a_3 i t^3 + \cdots]^2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + A_m[(1 + a_1 i)t + a_2 i t^2 + a_3 i t^3 + \cdots]^m \end{aligned} \tag{5.}$$

*) Indem wir die Gleichungen der Kurven S_1 und S_2 in der Form (2.) und (3.) schreiben, setzen wir stillschweigend voraus, daß keine der beiden Scheiteltangenten der y-Achse parallel ist. Da man die Koordinatenachsen beliebig wählen kann, so stellt diese Annahme offenbar keine Einschränkung dar.

geschrieben werden kann. Da die Kurve S_1' mit ihrer Scheiteltangente Berührung m-ter Ordnung haben soll, so muß der Ausdruck $Y - a_1 X$ die Gestalt

$$Y - a_1 X = c_1 t^{m+1} + c_2 t^{m+2} + \cdots \tag{6.}$$

haben. Da das Glied mit t auf der linken Seite von (6.) identisch verschwindet, so ergibt diese Beziehung zur Bestimmung der $(m-1)$ komplexen Koeffizienten $A_2 = \alpha_2 + \beta_2 i, \ldots A_m = \alpha_m + \beta_m i$ $(m-1)$ lineare Gleichungen. Ebenso viele Gleichungen ergibt die Forderung, daß auch die Kurve S_2' mit ihrer Scheiteltangente Berührung m-ter Ordnung haben soll. Es fragt sich nur, ob dieses System von Gleichungen immer auflösbar ist. Hierzu ist folgendes zu bemerken:

Die beiden Gleichungen, die man erhält, wenn man in dem Ausdrucke (6.) und in dem analogen zu der Kurve S_2 gehörigen Ausdrucke den Koeffizienten von t^k $(k \geqq 2)$ gleich Null setzt, enthalten nur die Unbekannten $\alpha_2, \beta_2, \ldots \alpha_k, \beta_k$. Es sei $a_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, $b_1 = \operatorname{tg} \varphi_2$. Die soeben genannten Gleichungen erscheinen alsdann in der Form

$$(7.) \quad \begin{cases} \dfrac{\beta_k \cos(k-1)\varphi_1 + \alpha_k \sin(k-1)\varphi_1}{\cos^{k+1}\varphi_1} + p_{k-1}\alpha_{k-1} + q_{k-1}\beta_{k-1} + \cdots = g, \\ \dfrac{\beta_k \cos(k-1)\varphi_2 + \alpha_k \sin(k-1)\varphi_2}{\cos^{k+1}\varphi_2} + r_{k-1}\alpha_{k-1} + s_{k-1}\beta_{k-1} + \cdots = h, \end{cases} \quad {\scriptstyle (k=2,\ldots m)}$$

worin p_i, q_i, r_i, s_i, g, h $(i = 2, \ldots k-1)$ bekannte Größen bedeuten.

Ist keine der Determinanten

$$(8.) \quad D_k = \frac{1}{\cos^{k+1}\varphi_1 \cos^{k+1}\varphi_2} \begin{vmatrix} \cos(k-1)\varphi_1, & \sin(k-1)\varphi_1 \\ \cos(k-1)\varphi_2, & \sin(k-1)\varphi_2 \end{vmatrix} = \frac{\pm \sin(k-1)\alpha\pi}{\cos^{k+1}\varphi_1 \cos^{k+1}\varphi_2} \quad {\scriptstyle (k=2,\ldots m)}$$

gleich Null, so lassen sich die Koeffizienten $A_2, \ldots A_m$ eindeutig bestimmen. Ist α irrational, so kann keine der Determinanten D_k verschwinden; ist dagegen $\alpha = \frac{p}{q}$, worin p und q teilerfremde ganze Zahlen bedeuten, so ist die erste verschwindende Determinante D_{q+1}. Unser Hilfssatz ist hiermit vollständig bewiesen.

Löst man die sich aus (5.) ergebende Gleichung

$$X = t + [(1 - a_1^2)\alpha_2 - 2a_1\beta_2]t^2 + \cdots \tag{9.}$$

nach t auf und setzt man den so erhaltenen Wert in (6.) ein, so erhält die Gleichung der Kurve S_1' die Gestalt

$$Y = a_1 X + d_1 X^m + d_2 X^{m+1} + \cdots. \tag{10.}$$

Die Gleichung der Kurve S_2' lautet

$$Y = b_1 X + e_1 X^m + e_2 X^{m+1} + \cdots. \tag{11.}$$

Die Kurven (10.) und (11.) schließen miteinander acht Winkel ein. Wir betrachten irgendeinen der beiden Winkel, die den Wert $\alpha\pi$ haben, und bezeichnen seine Seiten mit S_1'' und S_2''. S_1'' stellt einen Zweig der Kurve S_1', S_2'' einen Zweig der Kurve S_2' dar. Nunmehr führen wir durch Vermittelung der Funktion

$$Z_1 = X_1 + iY_1 = Z^{\frac{1}{\alpha}} = (X + iY)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{12.}$$

eine konforme Abbildung aus. Unter $Z^{\frac{1}{\alpha}}$ verstehen wir etwa denjenigen Zweig der Funktion $e^{\frac{1}{\alpha}\log z}$, der die positive Hälfte der X-Achse in sich selbst transformiert. Der Kurvenzug $S_1'' S_2''$ wird hierbei auf ein Kurvenstück $\bar{S}$ mit stetiger Tangente abgebildet. Es ist nun leicht zu zeigen, daß $\bar{S}$ *abteilungsweise stetige Krümmung hat.*

Betrachten wir z. B. die Kurve S_1'' und nehmen wir der Einfachheit halber an, ihre Scheiteltangente liege in der den positiven Abszissen entsprechenden Halbebene. S_1'' wird auf eine Kurve S_1''' abgebildet, deren Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} X_1 + iY_1 &= X^{\frac{1}{\alpha}}\left|(1 + ia_1) + id_1 X^m + id_2 X^{m+1} + \cdots\right|^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= X^{\frac{1}{\alpha}}(1 + ia_1)^{\frac{1}{\alpha}}\left[1 + (\varepsilon_1' + i\varepsilon_1'')X^m + (\varepsilon_2' + i\varepsilon_2'')X^{m+1} + \cdots\right] \\ &= X^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{\cos\frac{1}{\alpha}\varphi_1 + i\sin\frac{1}{\alpha}\varphi_1}{(\cos\varphi_1)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \left[1 + (\varepsilon_1' + i\varepsilon_1'')X^m + (\varepsilon_2' + i\varepsilon_2'')X^{m+1} + \cdots\right] \end{aligned} \tag{13.}$$

geschrieben werden kann.

Aus (13.) erhalten wir die weiteren Formeln

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= X^{\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{\cos\frac{1}{\alpha}\varphi_1}{(\cos\varphi_1)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot (1 + \lambda_1 X^m + \lambda_2 X^{m+1} + \cdots)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\sin\frac{1}{\alpha}\varphi_1}{(\cos\varphi_1)^{\frac{1}{\alpha}}}(\mu_1 X^m + \mu_2 X^{m+1} + \cdots)\right], \\ Y_1 &= X^{\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{\cos\frac{1}{\alpha}\varphi_1}{(\cos\varphi_1)^{\frac{1}{\alpha}}}(\nu_1 X^m + \nu_2 X^{m+1} \cdots)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\sin\frac{1}{\alpha}\varphi_1}{(\cos\varphi_1)^{\frac{1}{\alpha}}}(1 + \pi_1 X^m + \pi_2 X^{m+1} + \cdots)\right]. \end{aligned}\right. \tag{14.}$$

$\cos\frac{1}{\alpha}\varphi_1$ und $\sin\frac{1}{\alpha}\varphi_1$ sind sicher nicht zugleich gleich Null. Es sei z. B. $\cos\frac{1}{\alpha}\varphi_1 \neq 0$. $\cos\varphi_1$ ist nach der Voraussetzung > 0. Für hinreichend kleine Werte von X hat daher, wie aus der ersten der beiden Gleichungen (14.) folgt, X_1 dasselbe Vorzeichen wie $\cos\frac{1}{\alpha}\varphi_1$. Der Ausdruck $\frac{X_1}{\cos\frac{1}{\alpha}\varphi_1}$ ist somit positiv. Aus der ersten der Formeln (14.) ergibt sich nunmehr

$$(15.)\quad X = \left(\frac{X_1}{\cos\frac{1}{\alpha}\varphi_1}\right)^{\alpha}\left[\omega_1 + \omega_2\left(\frac{X_1}{\cos\frac{1}{\alpha}\varphi_1}\right)^{\alpha m} + \cdots\right],\quad \omega_1 > 0,$$

daher endgültig

$$(16.)\qquad Y_1 = X_1(\eta_1 + \eta_2 X_1^{\alpha m} + \cdots).$$

Ist $\alpha = \frac{p}{q}$, worin p und q teilerfremde ganze Zahlen bedeuten, so wählen wir $m = q$, daher $\alpha m = p$; ist α irrational, so sei m die kleinste, der Bedingung $\alpha m > 1$ genügende, ganze Zahl. Die Kurve S_1''' ist alsdann stetig gekrümmt. In ähnlicher Weise kann gezeigt werden, daß auch S_2''' stetig gekrümmt ist. Im Koordinatenursprung sind die Krümmungen der beiden Kurven S_1''' und S_2''' im allgemeinen von einander verschieden. $\bar{S}$ hat somit, wie behauptet, allgemein zu reden, abteilungsweise stetige Krümmung.

§ 2.

Es sei jetzt T irgend ein von einer endlichen Anzahl Stücke regulär analytischer Linien begrenztes einfach zusammenhängendes endliches Gebiet ohne Spitzen. Es sei A eine Ecke der Begrenzung von T; es möge $\alpha\pi$ der eingeschlossene Winkel sein. Wir nehmen der Einfachheit halber an, der Punkt A liege im Koordinatenursprung. Wir ordnen, den vorstehenden Entwicklungen gemäß, der Ecke A zwei ganz bestimmte Funktionen

$$(17.)\quad \mathfrak{Z} = z + \sum_{k=2}^{m} A_k z^k \qquad \text{und} \qquad (18.)\quad \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}^{\frac{1}{\alpha}}$$

zu, durch deren Vermittelung die beiden Begrenzungsseiten der Ecke A auf eine Kurve mit stetiger Tangente und abteilungsweise stetiger Krümmung abgebildet werden. Eine Ecke des Gebietes T wird hierdurch zum Verschwinden gebracht. Dafür können aber im Innern, oder auf dem Rande des neuen Gebietes Windungspunkte auftreten; ferner können Teile

dieses Gebietes die Ebene mehrfach bedecken. Wir gehen diesen Komplikationen aus dem Wege, wenn wir die Funktionen (17.) und (18.) durch andere, passend gewählte, ersetzen.

Die Funktion (17.) kann man augenscheinlich durch eine Funktion

$$(19.) \qquad Z = z + \sum_{k=2}^{m} A_k z^k + \sum_{i=m+1}^{\infty} A_i z^i *),$$

worin $\sum_{i=m+1}^{\infty} A_i z^i$ eine beständig konvergente Potenzreihe bedeutet, ersetzen. Wir suchen diese Potenzreihe so zu bestimmen, daß die Funktion Z in der ganzen Ebene *nur die eine Nullstelle* $z = 0$ *hat und die Ableitung* $\frac{dZ}{dz}$ *überhaupt nicht verschwindet.* Wir schreiben

$$(20.) \qquad Z = z e^{B_1 z + \cdots + B_{m-1} z^{m-1} + (B_m z^m + \cdots)}.$$

$B_1, \ldots, B_{m-1}$ lassen sich ohne weiteres eindeutig so bestimmen, daß die m ersten Glieder der Potenzentwicklung von Z den vorgeschriebenen Wert erhalten. Jetzt ist eine ganze transzendente Funktion $B_m z^m + B_{m+1} z^{m+1} + \cdots$ so zu wählen, daß $\frac{dZ}{dz}$ und daher auch

$$(21.) \qquad \Phi(z) = \frac{z}{Z} \cdot \frac{dZ}{dz}$$

im Endlichen nirgends verschwindet. Nun ist

$$\Phi(z) = 1 + B_1 z + 2 B_2 z^2 + \cdots + (m-1) B_{m-1} z^{m-1} + m B_m z^m + \cdots.$$

Wir setzen

$$(22.) \qquad \Phi(z) = e^{C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_{m-1} z^{m-1}}$$

und bestimmen $C_1, \ldots, C_{m-1}$ so, daß die m ersten Glieder von $\Phi(z)$ den verlangten Wert $1 + B_1 z + \cdots + (m-1) B_{m-1} z^{m-1}$ erhalten. Alsdann wird

$$(23.) \qquad Z = e^{\int \frac{1}{z} e^{C_1 z + \cdots + C_{m-1} z^{m-1}} dz}.$$

Die dem unbestimmten Integrale zukommende Konstante ist so zu wählen, daß für $z = 0$ die Ableitung $\frac{dZ}{dz}$ gleich 1 wird.

Es sei T_0 irgendein einfach zusammenhängendes von einer geschlossenen regulär analytischen Linie begrenztes Gebiet, welches das Gebiet T ganz in seinem Innern enthält. Es sei ferner $\mathfrak{T}_0$ dasjenige einfach zusammenhängende, über der Ebene (X, Y) ausgebreitete Gebiet, welches dem Gebiete T_0 durch die konforme Abbildung (23.) zugeordnet

---

*) Die Funktion Z ist mit der in § 1 ebenso bezeichneten Funktion nicht zu verwechseln.

wird. Da $\frac{dZ}{dz} \neq 0$ ist, so enthält $\mathfrak{T}_0$ keinen Windungspunkt. Hingegen kann $\mathfrak{T}_0$ die Ebene zum Teil mehrfach bedecken*). Da Z, außer für $z = 0$, nicht verschwindet, so ist jedenfalls eine gewisse Umgebung des Punktes $Z = 0$ einfach bedeckt. Es sei $\mathfrak{K}$ der Kreis vom Halbmesser ϱ um den Koordinatenursprung in der Ebene (X, Y). Wir wählen ϱ so klein, daß $\mathfrak{K}$ ganz in das Innere von $\mathfrak{T}_0$ fällt und in allen Punkten von $\mathfrak{K}$ das Gebiet $\mathfrak{T}_0$ die Ebene einfach bedeckt.

Wir bezeichnen nunmehr die in dem Gebiete $\mathfrak{T}_0$ erklärte eindeutige Umkehrungsfunktion von Z mit u. Es ist also

$$z = u(Z). \tag{24.}$$

Durch Vermittelung der Funktion (23.) wird dem Gebiete T ein Gebiet $\mathfrak{T}$, das ganz im Innern von $\mathfrak{T}_0$ liegt, zugeordnet. Es sei $\overline{\mathfrak{T}}$ der im Innern von $\mathfrak{K}$ gelegene Teil von $\mathfrak{T}$. Wir verstehen im folgenden allgemein unter v^β, $\beta > 0$, denjenigen Zweig der Funktion $e^{\beta \log v}$, der den positiven Teil der Achse des Reellen in sich selbst transformiert. Durch Vermittelung der Funktion $Z^{\frac{1}{\alpha}}$ wird $\overline{\mathfrak{T}}$ auf ein Gebiet $\overline{\overline{\mathfrak{T}}}$ konform abgebildet. Es sei Z^* ein Punkt in $\mathfrak{K}$ außerhalb $\overline{\overline{\mathfrak{T}}}$**).

Betrachten wir die durch die Funktion

$$Z' = (Z^{\frac{1}{\alpha}} - Z^*)^\alpha \tag{25.}$$

vermittelte konforme Abbildung des Gebietes $\mathfrak{T}$. Zunächst bemerken wir, daß man $|Z^*|$ so klein wählen kann, daß das Gebiet $\mathfrak{T}'$, auf welches $\mathfrak{T}$ durch (25.) bezogen wird, sich beliebig wenig von $\mathfrak{T}$ unterscheidet und insbesondere im Innern von $\mathfrak{T}_0$ enthalten bleibt. Wir denken uns den Punkt Z^* der zuletzt genannten Bedingung gemäß bestimmt. Um den Charakter der Begrenzungskurve von $\mathfrak{T}'$ in der Nachbarschaft des Punktes $Z = 0$ zu untersuchen, bemerken wir, daß man die durch (25.) vermittelte konforme Abbildung als Endergebnis der beiden konformen Abbildungen

$$Z'' = Z^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{und} \quad Z' = (Z'' - Z^*)^\alpha \tag{26.}\ \text{(27.)}$$

auffassen kann. Aus den vorhin durchgeführten Betrachtungen folgt unter Berücksichtigung der besonderen Wahl des Punktes Z^*, daß die Randkurve

*) Man überzeugt sich leicht, daß man T_0 in eine endliche Anzahl Teile zerlegen kann, so daß die zugehörigen Teile von $\mathfrak{T}_0$ die Ebene (X, Y) einfach bedecken.

**) Der Leser wird gebeten, sich die zur Veranschaulichung etwa wünschenswerten Figuren selbst zu zeichnen.

des Gebietes $\mathfrak{T}'$ in der Nähe des Punktes $(-Z^*)^a$, der der Ecke A entspricht, stetige Tangente und abteilungsweise stetige Krümmung hat. Nunmehr bilden wir das Gebiet $\mathfrak{T}'$ durch Vermittelung der Funktion $z' = u(Z')$ auf ein Gebiet T' ab. Das Gebiet T' liegt ganz im Innern von T_0 und ist somit über der Ebene überall einfach ausgebreitet. Es sei A' derjenige Punkt der Begrenzung von T', der der Ecke A entspricht. Die Begrenzung von T' besteht aus einer endlichen Anzahl Stücke analytischer Linien. Es sei n die Anzahl der Ecken des Gebietes T. Die Randkurven von T' schließen $(n-1)$ Ecken mit von π verschiedenem Winkel miteinander ein; sie können über diese Ecken hinaus analytisch fortgesetzt werden. In der „Ecke" A' ist der eingeschlossene Winkel gleich π; im Gegensatz zu den übrigen Ecken können die Begrenzungskurven im allgemeinen nicht über A' hinaus analytisch fortgesetzt werden. Sie sind indessen überall stetig gekrümmt; nur in A' sind die Krümmungsradien der beiden dort zusammenstoßenden Kurvenstücke im allgemeinen voneinander verschieden.

Durch wiederholte Anwendung des soeben angegebenen Verfahrens läßt sich das gegebene Gebiet T auf ein Gebiet T^* konform abbilden, das von einer Kurve begrenzt ist, welche stetige Tangente und abteilungsweise stetige Krümmung hat. Die Begrenzung des Gebietes T^* entspricht offenbar den Voraussetzungen des zu Anfang dieses Kapitels angeführten Satzes.

Durch die bisherigen Entwicklungen und durch jenen Satz ist somit die konforme Abbildung des Gebietes T auf den Einheitskreis vollständig erledigt. Das vorgelegte Gebiet T wird durch eine Reihe von konformen Abbildungen, *die explizite angegeben werden können,* sobald die Gleichungen der Begrenzungskurven von T bekannt sind, auf ein Gebiet T^* abgebildet. Die *Fredholm*sche Theorie liefert den expliziten Ausdruck für den reellen Teil derjenigen analytischen Funktion, welche das Gebiet T^* auf den Einheitskreis abbildet.

Es sei nunmehr $F(z)$ eine analytische Funktion, durch deren Vermittelung das Gebiet T auf den Einheitskreis konform abgebildet werden kann, und es mögen $z^{(1)} = 0$, $z^{(2)}$, ... $z^{(n)}$ die Eckpunkte des Gebietes, $\alpha^{(1)}\pi = \alpha\pi$, $\alpha^{(2)}\pi$, ... $\alpha^{(n)}\pi$ die zugehörigen Winkel bedeuten. *Aus den soeben durchgeführten Betrachtungen folgt,* wie sich ohne Mühe zeigen läßt, *daß man die Ableitung* $\frac{dF(z)}{dz}$ *in der Form*

$$(28.) \qquad \frac{dF(z)}{dz} = \prod_{i=1}^{n} (z - z^{(i)})^{\frac{1}{\alpha_i} - 1} \Theta(z),$$

worin $\Theta(z)$ eine in T und auf S stetige, von Null verschiedene Funktion bedeutet, darstellen kann.

Aus der erörterten Bildungsweise der Funktion $F(z)$ kann man noch einen weiteren Schluß ziehen. Die durch die Funktion (23.) vermittelte Abbildung ist überall im Endlichen winkeltreu. Die das Gebiet T^* auf den Einheitskreis beziehende Funktion ist stetig; ihre Ableitung ist noch auf dem Rande stetig und von Null verschieden; diese Abbildung ist somit im Innern und auf dem Rande winkeltreu. Durch die Abbildung (25.) schließlich werden die Winkel im Punkte $Z = 0$ im Verhältnis $\alpha\pi : \pi$ vergrößert oder verkleinert. Wir können daher sagen:

Bei der durch die Funktion $F(z)$ vermittelten konformen Abbildung werden die Winkel in der Ecke A im Verhältnis $\alpha\pi : \pi$ vergrößert oder verkleinert).*

Sind alle $\alpha^{(i)}$ irrational, so kann man den Grad m der ganzen rationalen Funktion (17.) beliebig hoch wählen. Durch Vermittelung der im obigen angegebenen Folge von analytischen Funktionen wird alsdann das Gebiet T auf ein Gebiet τ abgebildet, dessen Randkurve sich in ihren Eigenschaften einer analytischen Kurve nähert: die Koordinaten der Punkte dieser Kurve haben, als Funktionen der Bogenlänge betrachtet, stetige Ableitungen bis zu einer gewissen endlichen Ordnung m_1, die mit m über alle Grenzen wächst. Es sei $\Pi(z)$ eine analytische Funktion, durch deren Vermittelung das Gebiet τ auf den Einheitskreis konform abgebildet werden kann. Die Funktion $\Pi(z)$ ist neben ihren Ableitungen, bis zu einer gewissen endlichen, mit m_1 unbegrenzt wachsenden Ordnung, noch auf dem Rande des Gebietes stetig. Hieraus kann man nun folgenden Schluß über das Verhalten der höheren Ableitungen der Funktion $F(z)$ in der Ecke A ziehen: Es ist

$$(29.) \qquad \frac{d^k F(z)}{dz^k} = \frac{d}{dz^k} (z^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot F_k(z).$$

Es möge vorübergehend τ' irgendein Teilgebiet von T, das die Ecke A, aber keine weitere Ecke von T enthält, bezeichnen.

Die Funktion $F_k(z)$ ist in T regulär und im Innern und auf dem Rande von τ' beschränkt.

---

*) Vgl. *P. Painlevé*, Comptes rendus de l'Acad. des Sciences. Paris. T. CXII, 1891.

Dieser Satz ist höchst wahrscheinlich auch dann noch richtig, wenn einzelne oder alle α rational sind. Da in diesem Falle die Exponenten m nicht alle beliebig hoch gewählt werden können, so müßte der Beweis indessen anders, als im obigen angedeutet, geführt werden.

Es sei $F^*(z)$ eine analytische Funktion, durch deren Vermittelung das Gebiet T auf eine Halbebene konform abgebildet werden kann, und zwar so, daß dem Punkte $z = 0$ ein Punkt im Endlichen zugeordnet wird. Die soeben erwähnte Tatsache hat nun, wie man sich leicht überzeugt, zur Folge, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, für die Funktion $F^*(z)$ in der Nähe der Ecke A eine Entwicklung von der Form

$$z^{\frac{1}{\alpha}}\,\mathfrak{P}(z),\quad \mathfrak{P}(0) \neq 0$$

anzugeben. Man sieht ferner leicht ein, daß auch eine Entwicklung von der Form

$$z^{\frac{1}{\alpha}}\,\mathfrak{P}_1(z^{\frac{1}{\alpha}}),\quad \mathfrak{P}_1(0) \neq 0$$

im allgemeinen nicht statthat.

Wir haben uns bis jetzt mit der konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete beschäftigt. In ähnlicher Weise läßt sich die konforme Abbildung eines von einer endlichen Anzahl Stücke analytischer Kurven begrenzten mehrfach zusammenhängenden endlichen Gebietes ohne Spitzen auf ein von geschlossenen, regulär analytischen Kurven begrenztes endliches Gebiet durchführen. Liegt schließlich ein unendliches Gebiet vor, so kann man die Aufgabe durch eine geeignete lineare gebrochene Substitution auf die vorerwähnte zurückführen.

Kapitel II. Die linearen Randwertaufgaben der Potentialtheorie für ebene analytische Gebiete mit Ecken.

§ 1.

Die Betrachtungen des ersten Kapitels gestatten nunmehr die drei Randwertaufgaben der Potentialtheorie für ebene analytische Gebiete mit Ecken auf die Auflösung der der *Fredholm*schen Methode zugänglichen Integralgleichungen zurückzuführen.

Es möge sich zunächst um die Bestimmung einer im Innern des als endlich vorausgesetzten einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes T regulären Potentialfunktion $u(x, y)$ handeln, wenn am Rande

entweder die Werte $h(s)$ der Funktion selbst oder die Werte $g(s)$ ihrer Normalableitung vorgeschrieben sind. $h(s)$ und $g(s)$ mögen beschränkte und im *Lebesgue*schen Sinne integrierbare Funktionen der Bogenlänge s bedeuten.

Wie wir im ersten Kapitel dieser Arbeit gesehen haben, kann das Gebiet T durch Vermittelung einer analytischen Funktion $z'(z)$ auf ein von geschlossenen, regulär analytischen Kurven begrenztes Gebiet T' abgebildet werden. Die Ableitung $\frac{dz'}{dz}$ ist überall in T und auf der Begrenzung S von T, die Ecken ausgenommen, stetig und von Null verschieden. In der Nähe einer Ecke A ist $\frac{dz'}{dz} = \frac{d}{dz}(z^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot$ stetiger Funktion. Wir bezeichnen die Gesamtheit der Begrenzungskurven von T' mit S', die von gewissen festen Anfangspunkten gemessene Bogenlänge von S' mit s'.

Die vorliegende Aufgabe ist offenbar dem folgenden Problem äquivalent: Es ist eine in T' reguläre Potentialfunktion $v(x', y')$ zu bestimmen, wenn entweder ihre Randwerte $l(s')$ oder die Werte ihrer Normalableitung $k(s')$ vorgeschrieben sind. Die Funktion $l(s')$ ist, wie man sich leicht überzeugt, beschränkt und im *Lebesgue*schen Sinne integrierbar. Es sei (n) eine Innennormale des Gebietes T, (n') die korrespondierende Innennormale von T'. Aus der Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial n'} = \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \left| \frac{dz}{dz'} \right| \tag{30.}$$

folgt, daß die Funktion $k(s')$ in jedem, die den Ecken entsprechenden Randpunkte nicht enthaltenden Teile von S' beschränkt und im *Lebesgue*schen Sinne integrierbar ist. Es sei A' derjenige Punkt von S', der dem Eckpunkte A entspricht. Es mögen $\bar{s}$ und $\bar{s}'$ die zu den Punkten A und A' gehörigen Werte der Bogenlänge bedeuten. In der Nähe von A' ist

$$k(s') = g(s) \cdot |s' - \bar{s}'|^{\alpha-1} \cdot \text{stet. Funkt.} = |s' - \bar{s}'|^{\alpha-1} \cdot \text{beschr. Funkt.} \tag{31.}$$

Die Funktion $k(s')$ ist, sofern $\alpha < 1$ angenommen wird, nicht beschränkt, jedoch im *Lebesgue*schen Sinne integrierbar (sommable)*). Ist, allgemeiner, in der Nähe der Ecke A

$$|g(s)| < C|s - \bar{s}|^{\beta-1}, \ \beta > 0, \tag{32.}$$

worin C eine Konstante bedeutet, so findet man

$$|k(s')| < C' \cdot |s - \bar{s}|^{\beta-1} \cdot |s' - \bar{s}'|^{\alpha-1}, \text{ oder}$$

$$|k(s')| < C'' |s' - \bar{s}'|^{\alpha(\beta-1)+\alpha-1} = C'' |s' - \bar{s}'|^{\alpha\beta-1}. \tag{33.}$$

*) In den folgenden Betrachtungen werden stets alle α kleiner als 1 vorausgesetzt.

C' und C'' sind gewisse positive Größen. Die im allgemeinen nicht beschränkte Funktion $k(s')$ ist auch jetzt noch im *Lebesgue*schen Sinne integrierbar. Das nunmehr vorliegende Problem läßt sich bekanntlich sofort auf die Auflösung einer linearen nicht homogenen Integralgleichung mit stetigem Kerne zurückführen. Damit sind die beiden ersten Randwertaufgaben der Potentialtheorie für Innengebiete mit Ecken bereits erledigt.

Dieses Resultat ist natürlich nicht neu: die erste Randwertaufgabe kann für Gebiete mit Ecken nach allen klassischen Verfahren behandelt werden; die zweite Randwertaufgabe kann sogar in einem weiteren Umfange, wie von Herrn *Zaremba* zuerst gezeigt worden ist, mit Hilfe der *Neumann*schen Methode erledigt werden*). Das im obigen dargelegte Verfahren der Zurückführung auf eine Integralgleichung empfiehlt sich durch seine Kürze und Übersichtlichkeit.

Resultate, die voraussichtlich neu sind, ergeben sich, wenn man zu der dritten Randwertaufgabe übergeht.

Es sei diejenige im Innern des Gebietes T reguläre Potentialfunktion $u(x, y)$ zu bestimmen, die am Rande der Bedingung

$$\frac{\partial u(s)}{\partial n} + f(s)\, u(s) = g(s) \tag{34.}$$

genügt. $f(s)$ und $g(s)$ sind beschränkte und im *Lebesgue*schen Sinne integrierbare Funktionen der Bogenlänge; $f(s)$ ist natürlich nicht identisch gleich Null. Diese Aufgabe ist der folgenden äquivalent. Es ist diejenige im Innern des Gebietes T' reguläre Potentialfunktion $w(x', y')$ zu bestimmen, welche die Randbedingung

$$\frac{\partial w(s')}{\partial n'} + j(s')\, w(s') = k(s') \tag{35.}$$

erfüllt. $j(s')$ und $k(s')$ sind in jedem, die den Ecken entsprechenden Punkte nicht enthaltenden Teile von S' beschränkt und im *Lebesgue*schen Sinne integrierbar. In der Nähe des Punktes A' ist

---

*) Vgl. *S. Zaremba*, Les fonctions fondamentales de M. *Poincaré* etc., Journal de Mathématiques, 1904, p. 395—444. Herr *Zaremba* betrachtet einfach oder mehrfach zusammenhängende, von einer endlichen Anzahl Stücke von Kurven mit stetiger Tangente begrenzte Gebiete ohne Spitzen. Ist σ die Länge irgendeines Teiles einer Kurve, θ der Winkel der beiden in den Endpunkten von σ errichteten Normalen, so ist $\theta < C_1\sigma$, worin C_1 eine gewisse positive Größe bedeutet. Die von Herrn *Zaremba* eingeführten Randbedingungen sind mit den soeben betrachteten Bedingungen (32.) im wesentlichen identisch.

$$(36.) \qquad \begin{aligned} |j(s')| &< C_1 |s' - \bar{s}'|^{\alpha-1}, \\ |k(s')| &< C_2 |s' - \bar{s}'|^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

C_1 und C_2 sind gewisse positive Werte. Die nicht beschränkten Funktionen $j(s')$ und $k(s')$ sind, wie man leicht zeigen kann, im *Lebesgue*schen Sinne integrierbar.

Ich habe bereits früher das zweite und das dritte Randwertproblem der Potentialtheorie für stetig gekrümmte Gebiete behandelt und die Existenz gewisser *Green*scher Funktionen bewiesen*). In dem jetzt vorliegenden Falle der Gebiete mit Ecken führen die an der bezeichneten Stelle durchgeführten Betrachtungen immer noch zum Ziele, nur erfordert die Auflösung der sich nunmehr ergebenden Integralgleichungen einige besondere Überlegungen. Auch ist bei dem Nachweise der Vollständigkeit der Lösung einige Vorsicht am Platze.

Wir ändern jetzt die Bezeichnungen, um die folgenden Ausführungen an die zitierten Untersuchungen direkt anschließen zu können. Wir bezeichnen das vorgelegte Gebiet mit T, seine Begrenzung mit S**). Für (x, y), $f(x, y)$, (ξ, η), $f(\xi, \eta)$ schreiben wir zur Vereinfachung z, $f(z)$, ζ, $f(\zeta)$. Wir bezeichnen ferner die Punkte im Innern des Gebietes mit $z, z_1, z_2, \ldots$, die Punkte am Rande mit $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$. Die Entfernung der Punkte z und ζ möge $r_{z\zeta}$ heißen. Die Randbedingung schreiben wir in der Gestalt

$$(37.) \qquad \frac{\partial u(\zeta)}{\partial n} + f(\zeta)\, u(\zeta) = g(\zeta)\,***).$$

Die Funktionen $f(\zeta)$ und $g(\zeta)$ sind, außer in der Nachbarschaft einer endlichen Anzahl Punkte $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(k)}$, beschränkt und im *Lebesgue*schen Sinne integrierbar. In der Umgebung des singulären Punktes $\zeta^{(i)}$ ist

$$(38.) \qquad |f(\zeta)| < C^{(i)} r_{\zeta\zeta^{(i)}}^{\beta_i - 1}, \quad |g(\zeta)| < C^{(i)} r_{\zeta\zeta^{(i)}}^{\beta_i - 1}, \quad 1 > \beta_i > 0.$$

Wir nehmen an, daß es keine auf S ausgebreitete, von Null verschiedene einfache Belegung gibt, deren Potential in T identisch verschwindet.

---

*) „Über die zweite und dritte Randwertaufgabe in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p(x,y)$“. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 1909, IX Jahrgang, S. 19—28.

**) T und S treten somit an Stelle von T' und S' ein.

***) Die Funktionen u, f, g treten an Stelle von w, j, k ein. Sie sind mit den am Anfang dieses Kapitels ebenso bezeichneten Funktionen nicht zu verwechseln.

Sollte diese Annahme für das gerade betrachtete Gebiet nicht zutreffen, so würde jede Transformation von der Form

$$x' = \gamma x, \quad y' = \gamma y,$$

worin γ eine von Null und Eins verschiedene Konstante bedeutet, dieses Gebiet in ein Gebiet überführen, welches die gewünschte Eigenschaft besitzt*).

Wir machen den Ansatz

$$(39.) \qquad u(z) = \int \log \frac{1}{r_{z\zeta}}\, \theta(\zeta)\, ds_\zeta \text{**)}$$

und erhalten zur Bestimmung der Belegung $\theta(\zeta)$ in bekannter Weise die Integralgleichung

$$(40.)\ \pi\theta(\zeta_0) = \int \frac{\partial}{\partial n_{\zeta_0}}\Big(\log \frac{1}{r_{\zeta_0\zeta}}\Big)\theta(\zeta)\, ds_\zeta + f(\zeta_0)\int \log \frac{1}{r_{\zeta_0\zeta}}\,\theta(\zeta)\, ds_\zeta - g(\zeta_0) \text{***)}.$$

Es sei ζ_0 ein von den Punkten $\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(n)}$ verschiedener Punkt von S. Das erste Glied des Kernes

$$(41.) \qquad \frac{\partial}{\partial n_{\zeta_0}}\Big(\log \frac{1}{r_{\zeta_0\zeta}}\Big) + f(\zeta_0)\log \frac{1}{r_{\zeta_0\zeta}}$$

ist, als Funktion von ζ betrachtet, stetig; das zweite Glied wird für $\zeta = \zeta_0$ logarithmisch unendlich. Der erste iterierte Kern hat, wie man sich durch direkte Ausrechnung überzeugt, die Form

$$(42.) \qquad P_1(\zeta_0, \zeta) + f(\zeta_0)\, P_2(\zeta_0, \zeta),$$

worin $P_1(\zeta_0, \zeta)$ und $P_2(\zeta_0, \zeta)$ stetige Funktionen ihrer beiden Argumente bedeuten.

Die Integralgleichung (40.) ist einer Integralgleichung von der Form

$$(43.) \qquad \theta(\zeta_0) + \int [P_1(\zeta_0, \zeta) + f(\zeta_0)\, P_2(\zeta_0, \zeta)]\theta(\zeta) ds_\zeta = g_1(\zeta_0)$$

äquivalent. Die Funktion $g_1(\zeta_0)$ wird, wie $f(\zeta_0)$ und $g(\zeta_0)$, an einer endlichen Anzahl Stellen $\zeta^{(i)}$ $(i = 1, \ldots k)$ von der Ordnung $1 - \beta_i$, $\beta_i > 0$ unendlich.

§ 2.

Betrachten wir die Integralgleichung

$$(44.) \quad \theta(\zeta_0) + \lambda \int [P_1(\zeta_0, \zeta) + f(\zeta_0) P_2(\zeta_0, \zeta)]\theta(\zeta)\, ds_\zeta = g_1(\zeta_0)$$

---

*) Vgl. die vorhin zitierte Arbeit des Verfassers, S. 21 u. 22.

**) A. a. O. S. 23. Durch das Zeichen ds_ζ soll angedeutet werden, daß ζ die Integrationsvariable ist.

***) Diese Beziehung ist erfüllt überall, außer höchstens in einer Menge von Punkten vom Maße Null, sofern $f(\zeta)$, $g(\zeta)$ und $\theta(\zeta)$ im *Riemann*schen Sinne integrierbar sind. Sie gilt vermutlich auch, wenn diese Funktionen, wie vorausgesetzt, beschränkt und im *Lebesgue*schen Sinne integrierbar sind.

und nehmen wir allgemeiner an, P_1 und P_2 mögen stetige Funktionen ihrer beiden Argumente, $f(\zeta_0)$ und $g_1(\zeta_0)$ nicht beschränkte, im *Lebesgue*schen Sinne integrierbare Funktionen bedeuten.

Man bemerkt leicht, daß es nicht möglich ist, durch wiederholte Iteration zu einem überall stetigen Kerne zu gelangen; *alle iterierten Kerne haben vielmehr die Gestalt* (42.). *Nichtsdestoweniger bleibt die Fredholmsche Theorie auf die Integralgleichung* (44.) *in vollem Umfange anwendbar.*

Betrachten wir, in der Tat, den *Fredholm*schen Ausdruck

$$(45.) \qquad F(\zeta_0, \zeta) = \frac{D\left(\lambda, \begin{matrix}\zeta_0\\ \zeta\end{matrix}\right)}{D(\lambda)} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} A_m(\zeta_0, \zeta)}{1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} A_m}.$$

Im vorliegenden Falle ist

$$A_0(\zeta_0, \zeta) = P_1(\zeta_0, \zeta) + f(\zeta_0) P_2(\zeta_0, \zeta), \quad A_m(\zeta_0, \zeta) = \int \cdots \int \Delta_m d\vartheta_1 \cdots d\vartheta_m,$$

$$(46.) \quad \Delta_m = \begin{vmatrix} P_1(\zeta_0,\zeta) + f(\zeta_0)P_2(\zeta_0,\zeta), & P_1(\vartheta_1,\zeta) + f(\vartheta_1)P_2(\vartheta_1,\zeta), & \dots P_1(\vartheta_m,\zeta) + f(\vartheta_m)P_2(\vartheta_m,\zeta) \\ P_1(\zeta_0,\vartheta_1) + f(\zeta_0)P_2(\zeta_0,\vartheta_1), & P_1(\vartheta_1,\vartheta_1) + f(\vartheta_1)P_2(\vartheta_1,\vartheta_1), & \dots P_1(\vartheta_m,\vartheta_1) + f(\vartheta_m)P_2(\vartheta_m,\vartheta_1) \\ P_1(\zeta_0,\vartheta_2) + f(\zeta_0)P_2(\zeta_0,\vartheta_2), & P_1(\vartheta_1,\vartheta_2) + f(\vartheta_1)P_2(\vartheta_1,\vartheta_2), & \dots P_1(\vartheta_m,\vartheta_2) + f(\vartheta_m)P_2(\vartheta_m,\vartheta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_1(\zeta_0,\vartheta_m) + f(\zeta_0)P_2(\zeta_0,\vartheta_m), & P_1(\vartheta_1,\vartheta_m) + f(\vartheta_1)P_2(\vartheta_1,\vartheta_m), & \dots P_1(\vartheta_m,\vartheta_m) + f(\vartheta_m)P_2(\vartheta_m,\vartheta_m) \end{vmatrix},$$

$$(47.) \qquad A_m = \int A_{m-1}(\vartheta, \vartheta)\, d\vartheta.$$

Die Integration ist über alle Begrenzungskurven S zu erstrecken. $d\vartheta, d\vartheta_1, \dots d\vartheta_m$ bedeuten das Bogendifferential. Für (46.) schreiben wir zur Vereinfachung

$$(48.) \qquad A_m(\zeta_0, \zeta) = A'_m(\zeta_0, \zeta) + A''_m(\zeta_0, \zeta) f(\zeta_0).$$

Hierin bedeutet $A'_m(\zeta_0, \zeta)$ den Ausdruck

$$A'_m(\zeta_0, \zeta) = \int \cdots \int \Delta'_m\, d\vartheta_1 d\vartheta_2 \cdots d\vartheta_m,$$

$$(49.) \quad \Delta'_m = \begin{vmatrix} P_1(\zeta_0,\zeta), & P_1(\vartheta_1,\zeta) + f(\vartheta_1)P_2(\vartheta_1,\zeta), & \dots P_1(\vartheta_m,\zeta) + f(\vartheta_m)P_2(\vartheta_m,\zeta) \\ P_1(\zeta_0,\vartheta_1), & P_1(\vartheta_1,\vartheta_1) + f(\vartheta_1)P_2(\vartheta_1,\vartheta_1), & \dots P_1(\vartheta_m,\vartheta_1) + f(\vartheta_m)P_2(\vartheta_m,\vartheta_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_1(\zeta_0,\vartheta_m), & P_1(\vartheta_1,\vartheta_m) + f(\vartheta_1)P_2(\vartheta_1,\vartheta_m), & \dots P_1(\vartheta_m,\vartheta_m) + f(\vartheta_m)P_2(\vartheta_m,\vartheta_m) \end{vmatrix}.$$

Man erhält $A''_m(\zeta_0, \zeta)$, wenn man in der unter dem Integralzeichen stehenden Determinante in der ersten Spalte P_1 durch P_2 ersetzt.

Es sei

$$(50.)\qquad M = \mathrm{Max}\,(|P_1(\zeta_0,\zeta)|, |P_2(\zeta_0,\zeta)|),\quad l = \int d\vartheta,\quad p = \int |f(\vartheta)|\,d\vartheta.$$

Zerlegt man die in den Ausdrücken $A'_m(\zeta_0,\zeta)$ und $A''_m(\zeta_0,\zeta)$ vorkommenden Determinanten in leicht ersichtlicher Weise in je 2^m Summanden und wendet man den bekannten Determinantensatz von Herrn *Hadamard* an, so findet man die Ungleichheitsbedingungen

$$(51.)\qquad \begin{cases} |A'_m(\zeta_0,\zeta)| < (m+1)^{\frac{m+1}{2}} M^{m+1}[l^m + \binom{m}{1} l^{m-1}p + \cdots + p^m] \\ \qquad\qquad = (m+1)^{\frac{m+1}{2}} M^{m+1}(l+p)^m, \\ |A''_m(\zeta_0,\zeta)| < (m+1)^{\frac{m+1}{2}} M^{m+1}(l+p)^m, \\ |A_m| < m^{\frac{m}{2}} M^m (l+p)^m. \end{cases}$$

Offenbar ist

$$(52.)\qquad F(\zeta_0,\zeta) = F_1(\zeta_0,\zeta;\lambda) + f(\zeta_0)\,F_2(\zeta_0,\zeta;\lambda),$$

worin $F_1(\zeta_0,\zeta;\lambda)$ und $F_2(\zeta_0,\zeta;\lambda)$ stetige Funktionen von ζ_0 und ζ und meromorphe Funktionen des Parameters λ darstellen.

Es sei zunächst λ keine Nullstelle der Funktion $D(\lambda)$. Man überzeugt sich ohne Mühe durch direktes Einsetzen, daß die Funktion

$$(53.)\qquad \theta(\zeta_0) = g_1(\zeta_0) - \lambda \int F(\zeta_0,\vartheta)\,g_1(\vartheta)\,d\vartheta$$

die Lösung der Integralgleichung (44.) darstellt. Die Funktion $\theta(\zeta_0)$ wird in der Nachbarschaft derjenigen Punkte des Randes, in denen $f(\zeta_0)$ und $g_1(\zeta_0)$ nicht beschränkt sind, allgemein zu reden, unendlich.

Ist λ eine Nullstelle von $D(\lambda)$, so ist die homogene Integralgleichung

$$(54.)\qquad \theta(\zeta_0) + \lambda \int [P_1(\zeta_0,\zeta) + f(\zeta_0)P_2(\zeta_0,\zeta)]\theta(\zeta)\,ds_\zeta = 0$$

auflösbar. Die Übertragung der bekannten weiteren Schlüsse von Herrn *Fredholm* bietet keine Schwierigkeiten.

Kehren wir zu der speziellen Integralgleichung (43.) zurück. Es sei zunächst -1 kein Eigenwert des Kernes $P_1(\zeta_0,\zeta) + f(\zeta_0)P_2(\zeta_0,\zeta)$. Die Funktion $\theta(\zeta_0)$ wird, wie aus der Formel (53.) folgt, in der Nachbarschaft der Punkte $\zeta^{(0)},\ldots\zeta^{(n)}$, allgemein zu reden, wie die Funktionen $f(\zeta_0)$ und $g(\zeta_0)$ unendlich. Die Funktion $u(z)$ ist in T und auf S stetig. Die Normalableitung $\frac{\partial u(z)}{\partial n}$ erfüllt, wie sich leicht zeigen läßt, in der Nachbarschaft der singulären Punkte $\zeta^{(1)},\ldots\zeta^{(n)}$ die Ungleichheitsbedingungen

$$\left|\frac{\partial u(z)}{\partial n}\right| < D_i r_{z\zeta^{(i)}}^{\beta_i - 1}, \tag{55.}$$

worin D_i gewisse positive Werte bedeuten. Außer höchstens einer Menge von Punkten vom Maße Null, ist überall

$$\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n} + f(\zeta)\, u(\zeta) = g(\zeta). \tag{56.}$$

Im vorliegenden Falle existiert ferner die zu der Randbedingung (35.) gehörige *Green*sche Funktion der Differentialgleichung $\Delta u = 0$.

Ist -1 ein Eigenwert des Kernes $P_1(\zeta_0, \zeta) + f(\zeta_0) P_2(\zeta_0, \zeta)$, so existiert die s. g. *Green*sche Funktion im erweiterten Sinne. Diese Sätze lassen sich im wesentlichen in derselben Weise, wie für durchaus stetige $f(\zeta)$, ableiten*).

Hierbei ist nur, was die Problemstellung selbst anbetrifft, folgendes zu beachten. Es sei z ein Punkt auf der Normale (n) im Punkte ζ des Randes. Sind $f(\zeta)$ und $g(\zeta)$ überall stetig, so kann man die Forderung stellen, daß der Differentialquotient $\frac{\partial u(z)}{\partial n}$ gegen den Grenzwert $\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n}$ auf der ganzen Berandung des Gebietes in gleichem Grade konvergiere. Alsdann läßt sich zeigen, daß das im vorhergehenden angegebene Verfahren alle Lösungen des Problems liefert. In dem jetzt vorliegenden allgemeineren Falle ist diese Forderung durch die folgende zu ersetzen:

Es sei τ irgend ein die Punkte $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)}$ nicht enthaltender Teil des Gebietes T. Die Funktion $u(z)$ soll in T und auf S stetig, in T regulär sein. Die partielle Ableitung $\frac{\partial u(z)}{\partial n}$ soll im Innern und auf dem Rande jedes Gebietes τ beschränkt sein. In der Nachbarschaft des singulären Punktes $\zeta^{(i)}$ soll

$$\left|\frac{\partial u(z)}{\partial n}\right| < D^{(i)} r_{z\zeta^{(i)}}^{\gamma_i - 1}, \quad 1 > \gamma_i > 0 \tag{57.}$$

sein, worin die $D^{(i)}$ gewisse positive Größen bedeuten. In allen Punkten von S, mit Ausschluß einer gewissen Menge vom Maße Null, ist

$$\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n} + f(\zeta)\, u(\zeta) = g(\zeta). \tag{58.}$$

*) Vergl. meine wiederholt zitierte Arbeit in den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Wir zeigen nunmehr, daß die vorhin gefundenen Lösungen die einzigen vorhandenen sind.

Es sei T' irgend ein ganz im Innern von T gelegenes Gebiet; S' sei seine aus stetig gekrümmten Kurven bestehende Begrenzung. Es mögen t und w Funktionen bedeuten, die in T und auf S stetig sind und in T stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial t(z)}{\partial n}$, $\frac{\partial w(z)}{\partial n}$ sind in jedem Gebiete τ beschränkt und erfüllen in der Nachbarschaft der Punkte $\zeta^{(i)}$ die Ungleichheitsbedingungen

$$(59.)\quad \left|\frac{\partial t(z)}{\partial n}\right| < E_i\, r_{z\zeta^{(i)}}^{\delta_i - 1}, \quad \left|\frac{\partial w(z)}{\partial n}\right| < E_i\, r_{z\zeta^{(i)}}^{\delta_i - 1}, \quad 1 > \delta_i > 0.$$

Die E_i sind gewisse positive Größen. Abgesehen von einer Menge von Punkten vom Maße Null sind die Grenzwerte $\frac{\partial t(\zeta)}{\partial n}$ und $\frac{\partial w(\zeta)}{\partial n}$ vorhanden.

Bekanntlich ist

$$(60.)\quad \iint_{T'} (t\,\Delta w - w\,\Delta t)\,dx\,dy = -\int_{S'} \left[t(\bar{\zeta})\,\frac{\partial w(\bar{\zeta})}{\partial n_{\bar{\zeta}}} - w(\bar{\zeta})\,\frac{\partial t(\bar{\zeta})}{\partial n_{\bar{\zeta}}}\right] ds_{\bar{\zeta}},$$

worin $\bar{\zeta}$ einen variablen Punkt auf S' bedeutet. Wir lassen nunmehr T' gegen T konvergieren. Berücksichtigt man den bekannten Satz von Herrn *Lebesgue* über die Vertauschbarkeit des Grenzüberganges und der Integration und beachtet man die Ungleichheitsbedingungen (59.), so erhält man die Beziehung

$$(61.)\quad \iint_{T} (t\,\Delta w - w\,\Delta t)\,dx\,dy = -\int_{S} \left[t(\zeta)\,\frac{\partial w(\zeta)}{\partial n_\zeta} - w(\zeta)\,\frac{\partial t(\zeta)}{\partial n_\zeta}\right] ds_\zeta.$$

Es sei z^* ein Punkt im Innern von T. Setzt man in (61.) für $t(z)$ und $w(z)$ entsprechend $u(z)$ und $\log\frac{1}{r_{zz^*}}$ ein, so findet man

$$(62.)\quad u(z^*) = \frac{1}{2\pi}\int u(\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\left(\log\frac{1}{r_{\zeta z^*}}\right) + f(\zeta)\log\frac{1}{r_{\zeta z^*}}\right] ds_\zeta - \frac{1}{2\pi}\int g(\zeta)\log\frac{1}{r_{\zeta z^*}}\,ds_\zeta.$$

Läßt man jetzt den Punkt z^* gegen einen Punkt ζ_0 des Randes konvergieren und beachtet man die bekannten Unstetigkeitseigenschaften des Potentials einer Doppelbelegung, so erhält man nach einer leichten Umformung für alle ζ_0, außer höchstens für eine Menge von Punkten vom Maße Null, die Beziehung

$$(63.)\qquad u(\zeta_0)=\frac{1}{\pi}\int u(\zeta)\Big[\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\Big(\log\frac{1}{r_{\zeta\zeta_0}}\Big)+f(\zeta)\log\frac{1}{r_{\zeta\zeta_0}}\Big]ds_\zeta - \frac{1}{\pi}\int g(\zeta)\log\frac{1}{r_{\zeta\zeta_0}}\,ds_\zeta.$$

Diese Integralgleichung ist der Integralgleichung (40.) adjungiert. Sie hat in jedem Falle dieselbe Anzahl linear unabhängiger Lösungen wie jene Gleichung. Die von uns gefundenen Lösungen stellen somit alle die zuletzt genannten Forderungen erfüllenden Lösungen des Problems dar.

*Volterra*sche Integralgleichungen und Summengleichungen.

Erster Teil: Zur Theorie der Singularitäten *Volterra*scher Integralgleichungen.

Von Herrn *J. Horn* in Darmstadt.

Die Integralgleichung

$$\text{(A)} \qquad \int_0^x H(x,y)\,\varphi(y)\,dy = f(x),$$

in welcher der Kern $H(x,y)$ und $f(x)$ gegebene Funktionen sind, während die Funktion $\varphi(y)$ zu bestimmen ist, wird von *Le Roux**), *Volterra***), *Picard****) und *Lalesco*†) zunächst unter der Voraussetzung gelöst, daß $H(0,0)$ von Null verschieden ist††).

Ist $H(0,0)=0$, so beginne die Entwicklung des Kernes

$$H(x,y) = \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu$$

mit Gliedern m-ter Dimension ($m \geqq 1$); es sei also $a_{\lambda\mu}=0$ $(\lambda+\mu<m)$, während die Größen $a_{\lambda\mu}$ $(\lambda+\mu=m)$ nicht sämtlich verschwinden. Unter der Annahme, daß

*) Annales de l'École Normale 1895, p. 243—246.

**) „Sulla inversione degli integrali definiti“ (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, T. 31 (1896), p. 311). — *Volterra* hat über die von *Picard* nach ihm benannte Integralgleichung vier Noten in dem genannten Bande, zwei Noten in den Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Serie 5, vol. 5 (1896), sowie eine Arbeit in den Annali di Matematica, Serie 2, Bd. 25 (1897) veröffentlicht.

***) Comptes rendus de l'Acad. des Sciences. Paris. T. 139 (1904), p. 245.

†) „Sur l'équation de *Volterra*“ (Journ. de Mathém. 1908).

††) Wir setzen $H(x,y)$ als analytische, in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ reguläre Funktion voraus. Für viele Untersuchungen genügt es allerdings, unter $H(x,y)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen x,y zu verstehen, welche gewisse Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllt.

$$a_{m0} + a_{m-1,1} + \cdots + a_{1,m-1} + a_{0m} \neq 0$$

ist, ist die Integralgleichung (A) von *Volterra**), *Holmgren***) und *Lalesco****) behandelt, während die Annahme

$$a_{m0} + a_{m-1,1} + \cdots + a_{1,m-1} + a_{0,m} = 0$$

eine besondere Untersuchung erfordert, welcher *Holmgren* und *Lalesco* unter Beschränkung auf $m = 1$ nur einige Seiten gewidmet haben.

Die eingehendere Behandlung des Falles $a_{00} = 0$, $a_{10} + a_{01} = 0$, $a_{10} \neq 0$, $a_{01} \neq 0$†) bildet den eigentlichen Gegenstand dieses ersten Teiles des vorliegenden Aufsatzes (§§ 4—7); zur Vergleichung und zur Ergänzung der früheren Untersuchungen wird die entsprechende Behandlung des Falles $a_{00} = 0$, $a_{10} + a_{01} \neq 0$ (§§ 2—3) vorausgeschickt. Die im folgenden zu führende Untersuchung ist verwandt mit der Untersuchung der Integrale einer linearen Differentialgleichung††) in der Nähe einer singulären Stelle der Unbestimmtheit; insbesondere werden divergente Reihen nach Art der *Thomé*schen Normalreihen, welche der Integralgleichung formell genügen, zur asymptotischen Darstellung der Lösungen benutzt; dabei lassen sich Methoden verwenden, die ich zum Teil schon früher auf Differentialgleichungen angewandt habe. —

Wie sich viele Untersuchungen über Differentialgleichungen auf Differenzengleichungen übertragen lassen, so lassen sich den *Volterra*schen Integralgleichungen gewisse Gleichungen an die Seite stellen, die man als *Summengleichungen* bezeichnen kann.

---

*) Torino Atti, T. 31, p. 557 und p. 693.

**) „Recherches sur l'inversion des intégrales définies" (Nova Acta Soc. Scient. Upsaliensis, Serie 3, Bd. 20; Auszug Torino Atti, T. 35, p. 579). — „Sur l'inversion des intégrales définies" (Bihang till Kgl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Bd. 25).

***) Journ. de Math. 1908, S. 136 ff.

†) Der allgemeinen Behandlung des Falles $m > 1$, $a_{m0} + \cdots + a_{0m} = 0$ ist der Umstand hinderlich, daß das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle noch nicht unter Berücksichtigung aller Fälle untersucht ist, wenn auch die Methoden für diese Untersuchung vorhanden sind.

††) Die *Volterra*sche Integralgleichung ist einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit gewissen Anfangsbedingungen äquivalent, wenn der Kern $H(x, y)$ eine ganze rationale Funktion n-ten Grades von x ist.

Der Integralgleichung

$$\int_0^x H(x,y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

würde die Summengleichung

$$\sum_0^{x+1} H(x,y)\,\varphi(y) = f(x)\text{*)}$$

(x ganze positive Zahl) entsprechen, die aber nichts anderes bedeutet als das System der linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
&H(0,0)\,\varphi(0) = f(0),\\
&H(1,0)\,\varphi(0) + H(1,1)\,\varphi(1) = f(1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&H(x,0)\,\varphi(0) + H(x,1)\,\varphi(1) + \cdots + H(x,x)\,\varphi(x) = f(x)
\end{aligned}$$

mit den Unbekannten $\varphi(0), \varphi(1), \ldots \varphi(x)$**). Die hier sich darbietende Aufgabe, unter gewissen Voraussetzungen über die Funktion $H(x,y)$ das Verhalten von $\varphi(x)$ für große x zu untersuchen, soll jedoch nicht behandelt werden; es sei nur bemerkt, daß die Rekursionsformel für die Koeffizienten der einer linearen Differentialgleichung mit analytischen Koeffizienten genügenden Potenzreihen eine solche Summengleichung ist, welche sich auf eine lineare Differenzengleichung reduziert, wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung rationale Funktionen sind***).

Zu einer anderen Fragestellung gelangt man, wenn man von der in § 8 behandelten Integralgleichung

$$-\int_\infty^x H(x,y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

zu der im zweiten Teil (§§ 9—13) behandelten Summengleichung

$$\text{(B)}\qquad -\sum_x^\infty H(x,y)\,\varphi(y) = f(x)\text{†)}$$

---

*) Dabei ist die Bezeichnung benutzt:

$$\sum_0^x F(y) = F(0) + F(1) + \cdots + F(x-1).$$

**) *Volterra* hat (Torino Atti, T. 31, p. 315) darauf hingewiesen, daß man von einem solchen linearen Gleichungssystem durch Grenzübergang zu der von ihm behandelten Integralgleichung gelangen kann.

***) Vgl. *Perron*, Jahresber. d. Math.-Ver. 1910, S. 135—137 und Math. Annalen, Bd. 70, S. 1 ff.

†) *Ford* führt (Annali di Matematica, Serie 3, T. 13) lineare Differenzengleichungen auf Summengleichungen mit der Grenze ∞ zurück, die allerdings eine etwas andere Form als die hier betrachtete haben. — Es sei auch auf die Rekursionsformel für die einer linearen Differentialgleichung genügenden *Laurent*schen Reihen hingewiesen.

übergeht, welche, wenn man etwa für x alle ganzen positiven Zahlen einschl. Null setzt, als System von unendlich vielen linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} H(0,0)\varphi(0) + H(0,1)\varphi(1) + H(0,2)\varphi(2) + \cdots &= -f(0), \\ H(1,1)\varphi(1) + H(1,2)\varphi(2) + \cdots &= -f(1), \\ H(2,2)\varphi(2) + \cdots &= -f(2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

mit den unendlich vielen Unbekannten $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$ geschrieben werden kann. Wenn $H(x, y)$ eine ganze rationale Funktion n-ten Grades von x ist, läßt sich die Summengleichung (B) auf eine lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung zurückführen (§ 9).

Die Summengleichung (B) wird zunächst unter der Voraussetzung gelöst, daß $\lim_{x=\infty} H(x, x)$ von Null verschieden ist (§ 11). Für den Fall, daß $\lim_{x=\infty} H(x, x) = 0$ ist, wird

$$H(x, y) = \frac{a_{10}}{x} + \frac{a_{01}}{y} + \frac{a_{20}}{x^2} + \frac{a_{11}}{xy} + \frac{a_{02}}{y^2} + \cdots$$

als konvergente oder asymptotische Potenzreihe von $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ vorausgesetzt. Wir nehmen an, daß entweder $a_{10} + a_{01} \neq 0$ oder $a_{10} + a_{01} = 0$, $a_{20} + a_{11} + a_{02} - a_{10} \neq 0$ ist, beschränken uns aber in § 12 und § 13 auf eine Gleichung (B), in welcher $f(x) \equiv 0$ ist. Die im folgenden benutzten Methoden zur Untersuchung von $\varphi(x)$ für große Werte von x finden sich zum Teil schon in meinen Arbeiten über lineare Differenzengleichungen.

§ 1.

Der Kern

$$H(x, y) = \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

der Integralgleichung (A) werde auf die Form

$$H(x, y) = H_0(y) + H_1(y)\frac{y-x}{1!} + H_2(y)\frac{(y-x)^2}{2!} + \cdots$$

gebracht, wo

$$H_0(y) = H(y, y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda y^\lambda; \quad a_\lambda = a_{\lambda 0} + a_{\lambda-1,1} + \cdots + a_{0\lambda},$$

$$H_1(y) = -a_{10} - (a_{11} + 2a_{20})y - \cdots, \quad H_2(y) = 2a_{20} + \cdots, \quad \cdots$$

Potenzreihen von y sind. Wenn $a_0 = a_{00} = 0$, $a_1 = a_{10} + a_{01} = 0$ ist, nehmen wir an, es sei

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_k = 0, \; a_{k+1} \neq 0, \qquad (k \geqq 1),$$

so daß

$$H_0(y) = y^{k+1}\mathfrak{H}(y), \; \mathfrak{H}(y) = a_{k+1} + a_{k+2}y + \cdots$$

ist. Um den Fall $a_{00} = 0$, $a_{10} + a_{01} \neq 0$ mitzubehandeln, lassen wir auch zu, daß $a_1 \neq 0$, also $k = 0$ ist.

Die Gleichung

$$\int_0^x \left[H_0(y) + H_1(y)\frac{y-x}{1!} + \cdots\right]\varphi(y)\,dy = f(x)$$

schreiben wir in der Form

$$\int_0^x \left[y^{k+1} + \frac{H_1(y)}{\mathfrak{H}(y)}\frac{y-x}{1!} + \cdots\right]\mathfrak{H}(y)\varphi(y)\,dy = f(x),$$

indem wir $\mathfrak{H}(y)\varphi(y)$ als unbekannte Funktion auffassen. Die Funktionen

$$\frac{H_1(y)}{\mathfrak{H}(y)} = -\frac{a_{10}}{a_{k+1}} + \cdots, \quad \frac{H_2(y)}{\mathfrak{H}(y)}, \; \cdots$$

sind regulär in einem um den Nullpunkt der y-Ebene beschriebenen Kreise, in welchem keine von $y = 0$ verschiedene Nullstelle der Funktion $H_0(y)$ liegt. Bei Beschränkung auf dieses Gebiet ist es zulässig,

$$H_0(y) = y^{k+1} \qquad (k \geqq 0)$$

zu setzen; dann ist

$$H_1(y) = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \cdots, \quad \alpha = -\frac{a_{10}}{a_{k+1,0} + a_{k1} + \cdots + a_{0,k+1}}.$$

Durch die Substitution $x = \lambda x'$, $y = \lambda y'$ geht die Gleichung

$$\int_0^x \left[y^{k+1} + H_1(y)\frac{y-x}{1!} + \cdots\right]\varphi(y)\,dy = f(x)$$

über in

$$\int_0^{x'} \left[y'^{k+1} + \frac{1}{\lambda^k}H_1(\lambda y')\frac{y'-x'}{1!} + \cdots\right]\varphi(\lambda y')\,dy' = \frac{1}{\lambda^{k+2}}f(\lambda x');$$

die an die Stelle von $H_1(y)$ tretende Funktion $\frac{1}{\lambda^k}H_1(\lambda y')$ beginnt mit dem Glied $\frac{\alpha}{\lambda^k}$ (also im Falle $k = 0$ mit dem Glied α). Als Integrationsweg nehmen wir die vom Nullpunkt nach x gehende Gerade. Ist $x = |x|e^{i\omega}$, so ist auf dem Integrationsweg $y = |y|e^{i\omega}$; nimmt man $\lambda = e^{i\omega}$ an, so erhalten $x' = |x|$, $y' = |y|$ reelle positive Werte. Der reelle Teil von

$$\frac{\alpha}{\lambda^k} = e^{-ik\omega}\alpha$$

ist im Falle $k > 0$ von Null verschieden, wenn ω keinen der Werte

$$\frac{\arg \alpha}{k} + \frac{(2n+1)\pi}{2k} \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

hat*). Wir setzen im folgenden, wenn nichts anderes angegeben wird, x und y reell positiv und den reellen Teil von α von Null verschieden voraus.

Indem man die Gleichung

$$\int_0^x H(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x)$$

zweimal nach x differenziert und die Bezeichnung

$$H_1(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = -H_1(y) - H_2(y)\,\frac{y-x}{1!} - \cdots,$$

$$H_2(x, y) = \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2} = H_2(y) + H_3(y)\,\frac{y-x}{1!} + \cdots$$

benutzt, erhält man die Gleichungen

$$x^{k+1}\varphi(x) + \int_0^x H_1(x, y)\varphi(y)\,dy = f'(x),$$

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi(x))}{dx} - H_1(x)\varphi(x) + \int_0^x H_2(x, y)\varphi(y)\,dy = f''(x).$$

Wir behandeln sowohl im Falle $k = 0$ als auch im Falle $k > 0$ zuerst die homogene Integralgleichung

$$\int_0^x H(x, y)\varphi(y)\,dy = 0$$

und beachten, daß die allgemeine Lösung der vorgelegten Integralgleichung (A) die Summe aus einer partikulären Lösung derselben und der allgemeinen Lösung der homogenen Integralgleichung ist. Aus einer Lösung $\varphi(x)$ der homogenen Integralgleichung geht die Lösung $C\varphi(x)$ mit der willkürlichen Konstanten C hervor.

§ 2.

Indem wir zunächst $a_{00} = 0$, $a_{10} + a_{01} \neq 0$, d. h. $k = 0$ voraussetzen, betrachten wir die homogene Integralgleichung

$$\int_0^x H(x, y)\varphi(y)\,dy = 0,$$

$$H(x, y) = y + H_1(y)\,\frac{y-x}{1!} + \cdots, \quad H_1(y) = \alpha + \alpha_1 y + \cdots$$

*) Da nach unserer Annahme $H(x, y)$ mit linearen Gliedern in x, y beginnt, so ist α von Null verschieden, wenn $k > 0$ ist.

und die durch zweimalige Differentiation erhaltene Gleichung

$$D(\varphi(x)) = \frac{d(x\varphi(x))}{dx} - H_1(x)\varphi(x) + \int_0^x H_2(x,y)\varphi(y)\,dy = 0,$$

die wir durch eine Kette von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzen:

$$\frac{d(x\varphi_0(x))}{dx} - H_1(x)\varphi_0(x) = 0,$$

$$\frac{d(x\varphi_{\nu+1}(x))}{dx} - H_1(x)\varphi_{\nu+1}(x) = -\Phi_\nu(x),\ \Phi_\nu(x) = \int_0^x H_2(x,y)\varphi_\nu(y)\,dy. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die erste dieser Differentialgleichungen hat die Lösung

$$\varphi_0(x) = x^\varrho \mathfrak{p}(x),$$

$$\varrho = \alpha - 1,\ \mathfrak{p}(x) = e^{a_1 x + \frac{a_2 x^2}{2} + \cdots};$$

es ist

$$\alpha = -\frac{a_{10}}{a_{10} + a_{01}},\ \varrho = -\frac{2a_{10} + a_{01}}{a_{10} + a_{01}}.$$

Es sei, wenn der reelle Teil von ϱ mit $\bar{\varrho}$ bezeichnet wird,

$$\bar{\varrho} > -1.$$

Dann hat die Differentialgleichung für $\varphi_{\nu+1}(x)$ die Lösung

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -x^\varrho \mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{y^{-\varrho-1}\Phi_\nu(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy.$$

Wenn für $0 \leqq x \leqq x_0,\ 0 \leqq y \leqq x_0\ (x_0 > 0)$

$$|\mathfrak{p}(x)| \leqq p,\ \left|\frac{1}{\mathfrak{p}(x)}\right| \leqq q,\ |H_2(x,y)| \leqq M$$

ist, hat man

$$|\varphi_0(x)| \leqq p x^{\bar{\varrho}},\ |\varphi_\nu(x)| \leqq C_\nu x^{\bar{\varrho}+\nu},\ C_\nu = \frac{p(Mpq)^\nu}{\nu!(\bar{\varrho}+1)(\bar{\varrho}+2)\cdots(\bar{\varrho}+\nu)};$$

denn daraus folgt

$$|\Phi_\nu(x)| \leqq C_\nu M \int_0^x y^{\bar{\varrho}+\nu}\,dy = \frac{C_\nu M x^{\bar{\varrho}+\nu+1}}{\bar{\varrho}+\nu+1},$$

$$|\varphi_{\nu+1}(x)| \leqq x^{\bar{\varrho}} \cdot \frac{C_\nu Mpq}{\bar{\varrho}+\nu+1} \int_0^x y^\nu\,dy = C_{\nu+1} x^{\bar{\varrho}+\nu+1},\ C_{\nu+1} = C_\nu \frac{Mpq}{(\nu+1)(\bar{\varrho}+\nu+1)}.$$

Demnach ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{-\varrho}\varphi_\nu(x)$$

für $0 \leqq x \leqq x_0$ absolut und gleichmäßig konvergent. In demselben Intervall (im Falle $\bar{\varrho} < 0$ für $\delta \leqq x \leqq x_0$, wo δ eine beliebig kleine positive Größe ist) konvergieren die Reihen

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x), \quad \Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_\nu(x)$$

gleichmäßig, folglich auch die Reihe

$$H_1(x)\,\varphi_0(x) + (H_1(x)\,\varphi_1(x) - \Phi_0(x)) + \cdots,$$

welche, wie sich durch Addition der Differentialgleichungen für $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots$ ergibt, mit

$$\frac{d(x\,\varphi_0(x))}{dx} + \frac{d(x\,\varphi_1(x))}{dx} + \cdots = \frac{d}{dx}[x\,(\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \cdots)]$$

übereinstimmt, so daß die Gleichung

$$\frac{d(x\varphi(x))}{dx} = H_1(x)\,\varphi(x) - \Phi(x)$$

besteht; d. h. $\varphi(x)$ genügt der Gleichung $D(\varphi(x)) = 0$. Durch zweimalige Integration dieser Gleichung ergeben sich die Gleichungen

$$x\varphi(x) + \int_0^x H_1(x, y)\,\varphi(y)\,dy = C,$$

$$\int_0^x H(x, y)\,\varphi(y)\,dy = Cx + C'.$$

Für $\lim x = 0$ erhält man $C = 0$, $C' = 0$, so daß $\varphi(x)$ der Gleichung

$$\int_0^x H(x, y)\,\varphi(y)\,dy = 0$$

genügt.

Es ergibt sich, daß die Reihe $\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x)$ auch für komplexe x und zwar für $|x| \leqq r_0$ konvergent ist, wenn die obigen Ungleichungen für $\mathfrak{p}(x)$, $\frac{1}{\mathfrak{p}(x)}$, $H_2(x, y)$ für $|x| \leqq r_0$, $|y| \leqq r_0$ gültig sind. Wenn $\varrho = \bar{\varrho} + i\bar{\bar{\varrho}}$ gesetzt wird und $\arg x$ zwischen endlichen Grenzen ω_1 und ω_2 liegt, ist

$$|x^\varrho| = |x|^{\bar{\varrho}}\, e^{-\bar{\bar{\varrho}} \arg x} \leqq \sigma\,|x|^{\bar{\varrho}}, \quad |x^{-\varrho}| = |x|^{-\bar{\varrho}}\, e^{\bar{\bar{\varrho}} \arg x} \leqq \tau\,|x|^{-\bar{\varrho}},$$

wo σ und τ endliche positive Größen sind. In dem Gebiet

$$|x| \leqq r_0, \quad \omega_1 \leqq \arg x \leqq \omega_2$$

ist

$$|\varphi_0(x)| \leqq p\sigma\,|x|^{\bar{\varrho}}, \quad |\varphi_\nu(x)| \leqq C_\nu\,|x|^{\bar{\varrho}+\nu}, \quad C_\nu = \frac{p\sigma\,(Mpq\sigma\tau)^\nu}{\nu!\,(\bar{\varrho}+1)\,(\bar{\varrho}+2)\cdots(\bar{\varrho}+\nu)},$$

so daß die Reihe für $\varphi(x)$ in dem angegebenen Gebiet absolut und gleichmäßig konvergiert (im Falle $\bar{\varrho} < 0$ ist $\delta \leqq |x| \leqq r_0$, $\delta > 0$ zu nehmen).

Es besteht eine Entwicklung

$$\varphi_\nu(x) = x^{\varrho+\nu}\,\mathfrak{P}_\nu(x),$$

wo $\mathfrak{P}_\nu(x)$ eine für $|x| \leqq r_0$ konvergente Potenzreihe von x darstellt. Denn

hieraus folgt

$$\Phi_\nu(x) = \int_0^x H_2(x, y)\, \mathfrak{P}_\nu(y) y^{\varrho+\nu} dy = x^{\varrho+\nu+1}\, \mathfrak{Q}_\nu(x),$$

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -x^\varrho \mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{y^\nu \mathfrak{Q}_\nu(y)}{\mathfrak{p}(y)} dy = x^{\varrho+\nu+1}\, \mathfrak{P}_{\nu+1}(x),$$

wo $\mathfrak{Q}_\nu(x)$ und $\mathfrak{P}_{\nu+1}(x)$ Potenzreihen von x sind, welche für $|x| \leqq r_0$ konvergieren. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{-\varrho} \varphi_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu\, \mathfrak{P}_\nu(x) = \mathfrak{P}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^\lambda$$

ist $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| \leqq r_0$ regulär, und man hat

$$\varphi(x) = x^\varrho\, \mathfrak{P}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^{\varrho+\lambda}.$$

Man kann die Koeffizienten dieser Reihe durch Einsetzen in die Gleichung $D(\varphi(x)) = 0$ und Vergleichung der Koeffizienten von $x^{\varrho+\lambda}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ berechnen. Man hat zunächst die Gleichung

$$(\varrho - \alpha + 1) c_0 = 0,$$

woraus sich $\varrho = \alpha - 1$ ergibt, während c_0 willkürlich bleibt. Allgemein ist

$$(\varrho + \lambda - \alpha + 1) c_\lambda = \lambda c_\lambda = \cdots,$$

wo die rechte Seite eine lineare homogene Funktion von $c_{\lambda-1}, \ldots c_1, c_0$ ist.

Wir haben den Satz bewiesen:

Die homogene Integralgleichung

$$\int_0^x H(x, y) \varphi(y) dy = 0,$$

worin

$$H(x, y) = a_{10} x + a_{01} y + \cdots; \quad a_{10} + a_{01} \neq 0$$

für $|x| < r$, $|y| < r$ *regulär ist und* $H(x, x)$ *für* $0 < |x| < r$ *nicht verschwindet, besitzt, wenn der reelle Teil von*

$$\varrho = -\frac{2a_{10} + a_{01}}{a_{10} + a_{01}}$$

größer als -1 *ist, eine (bis auf einen konstanten Faktor bestimmte) Lösung*

$$\varphi(x) = x^\varrho\, \mathfrak{P}(x),$$

wo $\mathfrak{P}(x)$ *für* $|x| < r$ *regulär und* $\mathfrak{P}(0) \neq 0$ *ist.*

Es sei jetzt $\overline{\varrho} < -1$. Wir zeigen, daß die homogene Integralgleichung eine differenzierbare Lösung $\varphi(x)$, welche für $0 \leqq x \leqq x_0$ (x_0 positiv) die Bedingung

$$|\varphi(x)| \leqq L x^{\delta-1} \qquad (\delta > 0)$$

erfüllt, nicht besitzen kann.

Aus der Gleichung

$$\frac{d(x\varphi(x))}{dx} - H_1(x)\,\varphi(x) + \Phi(x) = 0, \quad \Phi(x) = \int_0^x H_2(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

folgt

$$\varphi(x) = c\,x^{\varrho}\,\mathfrak{p}(x) - x^{\varrho}\,\mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{y^{-\varrho-1}\,\Phi(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy,$$

wo c eine willkürliche Konstante ist.

Im Falle $c = 0$ ist

$$\varphi(x) = -\,x^{\varrho}\,\mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{y^{-\varrho-1}\,\Phi(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy.$$

Unter der oben gemachten Annahme ist

$$|\Phi(x)| \leqq \frac{LMx^{\delta}}{\delta}, \quad |\varphi(x)| \leqq \frac{LMpqx^{\delta}}{\delta(-\bar{\varrho}+\delta)}.$$

Durch den Schluß von ν auf $\nu+1$ beweist man, daß für $0 \leqq x \leqq x_0$

$$|\varphi(x)| \leqq \frac{L(Mpq)^{\nu+1}\,x^{\delta+\nu}}{\delta(\delta+1)\cdots(\delta+\nu)(-\bar{\varrho}+\delta)\cdots(-\bar{\varrho}+\delta+\nu)}$$

ist. Da der Ausdruck auf der rechten Seite mit wachsendem ν beliebig klein wird, muß $\varphi(x)$ identisch verschwinden.

Im Falle $c \neq 0$ ist für hinreichend kleine positive x

$$|\varphi(x)| \geqq \frac{|c|\,x^{\bar{\varrho}}}{q} - \frac{LMpqx^{\delta}}{\delta(-\bar{\varrho}+\delta)} \geqq \frac{|c|Q}{q}\,x^{\bar{\varrho}},$$

wo Q eine positive Größe darstellt. Dies widerspricht der Annahme

$$|\varphi(x)| \leqq L x^{\delta-1}.$$

§ 3.

Die nicht homogene Integralgleichung

$$\int_0^x H(x,y)\,\varphi(y)\,dy = f(x),$$

$$H(x,y) = y + H_1(y)\,\frac{y-x}{1!} + \cdots, \quad H_1(y) = \alpha + \alpha_1 y + \cdots$$

ersetzen wir durch die Gleichung

$$D(\varphi(x)) = \frac{d(x\varphi(x))}{dx} - H_1(x)\,\varphi(x) + \int_0^x H_2(x,y)\,\varphi(y)\,dy - f''(x) = 0.$$

Wir lösen nach einander die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{d(x\varphi_0(x))}{dx} - H_1(x)\varphi_0(x) = f''(x),$$

$$\frac{d(x\varphi_{\nu+1}(x))}{dx} - H_1(x)\varphi_{\nu+1}(x) = -\Phi_\nu(x),\ \Phi_\nu(x) = \int_0^x H_2(x,y)\varphi_\nu(y)dy. \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

Indem wir die Veränderlichen x und y zunächst als reell und positiv voraussetzen, haben wir

$$\varphi_0(x) = x^\varrho \mathfrak{p}(x) \int_{\xi_0}^x \frac{y^{-\varrho-1} f''(y)}{\mathfrak{p}(y)}\, dy,$$

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -x^\varrho \mathfrak{p}(x) \int_{\xi_{\nu+1}}^x \frac{y^{-\varrho-1}\Phi_\nu(y)}{\mathfrak{p}(y)} dy, \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

wo die unteren Grenzen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ noch festgelegt werden.

Zur Abschätzung der absoluten Beträge von $\varphi_0(x)$, $\varphi_{\nu+1}(x)$ benutzen wir die folgende Bemerkung: Im Falle $\lambda > 0$ ist

$$\int_0^x y^{\lambda-1} dy = \frac{x^\lambda}{\lambda};$$

im Falle $\lambda < 0$ ist für $0 \leqq x \leqq x_0$

$$\left|\int_{x_0}^x y^{\lambda-1} dy\right| = \int_x^{x_0} y^{\lambda-1} dy = \frac{x_0^\lambda - x^\lambda}{\lambda} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{|\lambda|} - \left(\frac{1}{x_0}\right)^{|\lambda|}}{|\lambda|} \leqq \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{|\lambda|}}{|\lambda|} = \frac{x^\lambda}{|\lambda|}.$$

Ist für $0 \leqq x \leqq x_0$

$$|f''(x)| \leqq N,$$

so ist

$$|\varphi_0(x)| \leqq Npqx^{\bar\varrho}\left|\int_{\xi_0}^x y^{-\bar\varrho-1} dy\right|;$$

wenn man im Falle $\bar\varrho < 0$ $\xi_0 = 0$, im Falle $\bar\varrho > 0$ $\xi_0 = x_0$ annimmt, ist für $0 \leqq x \leqq x_0$

$$\left|\int_{\xi_0}^x y^{-\bar\varrho-1} dy\right| \leqq \frac{x^{-\bar\varrho}}{|\bar\varrho|},$$

also, wenn $\bar\varrho \gtrless 0$ ist,

$$|\varphi_0(x)| \leqq \frac{Npq}{|\bar\varrho|}.$$

Allgemein ist, wenn der reelle Teil von ϱ weder gleich Null, noch gleich einer positiven ganzen Zahl ist,

$$|\varphi_\nu(x)| \leqq C_\nu x^\nu,\ C_\nu = \frac{Npq\,(Mpq)^\nu}{\nu!\,|\bar\varrho|\cdot|\bar\varrho-1|\cdots|\bar\varrho-\nu|}.$$

Denn daraus folgt

$$|\Phi_\nu(x)| \leqq C_\nu M \int_0^x y^\nu dy = \frac{C_\nu M x^{\nu+1}}{\nu+1},$$

$$|\varphi_{\nu+1}(x)| \leqq \frac{C_\nu M p q}{\nu+1} x^{\bar{\varrho}} \left| \int_{\xi_{\nu+1}}^{x} y^{-\bar{\varrho}+\nu} dy \right|;$$

im Falle $\bar{\varrho} < 0$ wird $\xi_{\nu+1} = 0$ genommen; im Falle $\bar{\varrho} > 0$ wird $\xi_{\nu+1} = x_0$ gesetzt, wenn $-\bar{\varrho}+\nu+1 < 0$ oder $\nu < \bar{\varrho}-1$ ist, dagegen $\xi_{\nu+1} = 0$, wenn $-\bar{\varrho}+\nu+1 > 0$ oder $\nu > \bar{\varrho}-1$ ist; dann ist stets

$$\left| \int_{\xi_{\nu+1}}^{x} y^{-\bar{\varrho}+\nu} dy \right| \leqq \frac{x^{-\bar{\varrho}+\nu+1}}{|\bar{\varrho}-\nu-1|}, \quad \text{also}$$

$$|\varphi_{\nu+1}(x)| \leqq \frac{C_\nu M p q x^{\nu+1}}{(\nu+1)|\bar{\varrho}-\nu-1|}.$$

Demnach ist die Reihe

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots$$

für $0 \leqq x \leqq x_0$ absolut und gleichmäßig konvergent. Wie in § 2 zeigt man, daß $\varphi(x)$ der Gleichung $D(\varphi(x)) = 0$ genügt. Hieraus gehen durch zweimalige Integration die Gleichungen

$$x\varphi(x) + \int_0^x H_1(x,y)\varphi(y)\,dy = f'(x) + C,$$

$$\int_0^x H(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x) + Cx + C'$$

hervor; für $\lim x = 0$ ergibt sich $C = -f'(0)$, $C' = -f(0)$, so daß $\varphi(x)$ die Gleichung

$$\int_0^x H(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x) - f(0) - xf'(0)$$

befriedigt. Ist $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, so genügt $\varphi(x)$ der vorgelegten Integralgleichung

$$\int_0^x H(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x).$$

Wenn

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots$$

eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Funktion ist, so ist wegen $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$

$$f(x) = \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots,$$

also $f''(x) = f''(0) + \cdots$.

Indem wir die Beschränkung auf reelle positive x fallen lassen, nehmen wir $|x| \leqq r_0$ an. Für $|x| \leqq r_0$, $|y| \leqq r_0$ sei

$$|\mathfrak{p}(x)| \leqq p, \quad \left|\frac{1}{\mathfrak{p}(x)}\right| \leqq q, \quad |H_2(x,y)| \leqq M.$$

Als Integrationsweg dient die Verbindungsgerade des Nullpunktes mit dem Punkte $x = |x| e^{i\omega}$ oder die Verbindungsgerade der Punkte $x_0 = r_0 e^{i\omega}$ und $x = |x| e^{i\omega}$, so daß y auf dem ganzen Integrationsweg das Argument ω hat und $|dy| = \pm d|y|$ ist. Für

$$|x| \leqq r_0, \quad \omega_1 \leqq \arg x \leqq \omega_2$$

sei wie in § 2

$$|x^{\varrho}| \leqq \sigma |x|^{\bar{\varrho}}, \quad |x^{-\varrho}| \leqq \tau |x|^{-\bar{\varrho}}.$$

Für $\lambda > 0$ ist

$$\int_0^x |y|^{\lambda-1} |dy| = \int_0^{|x|} |y|^{\lambda-1} d|y| = \frac{|x|^{\lambda}}{\lambda};$$

für $\lambda < 0$ hat man

$$\int_{x_0}^x |y|^{\lambda-1} |dy| = \int_{|x|}^{|x_0|} |y|^{\lambda-1} d|y| \leqq \frac{|x|^{\lambda}}{|\lambda|}.$$

Wenn x dem angegebenen Gebiet angehört und $|f''(x)| \leqq N$ ist, ist

$$|\varphi_\nu(x)| \leqq \frac{Npq\sigma\tau(Mpq\sigma\tau)^\nu |x|^\nu}{\nu!\,|\bar{\varrho}| \cdot |\bar{\varrho}-1| \cdots |\bar{\varrho}-\nu|}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

so daß die Reihe $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Wir stellen Reihenentwicklungen für die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ auf, indem wir $f''(x)$ als im Gebiet $|x| \leqq r_0$ reguläre Funktion voraussetzen.

Wenn $\bar{\varrho} < 0$ ist, so daß $\xi_0, \xi_1, \ldots$ sämtlich gleich 0 angenommen werden können, hat man die für $|x| \leqq r_0$ konvergente Reihenentwicklung

$$\varphi_0(x) = c_{00} + c_{01} x + c_{02} x^2 + \cdots.$$

Allgemein ist

$$\varphi_\nu(x) = c_{\nu\nu} x^\nu + c_{\nu,\nu+1} x^{\nu+1} + \cdots.$$

Daraus folgt nämlich

$$\Phi_\nu(x) = \int_0^x H_2(x,y)(c_{\nu\nu} y^\nu + \cdots)\, dy = C_{\nu 0} x^{\nu+1} + C_{\nu 1} x^{\nu+2} + \cdots,$$

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -x^{\varrho}\,\mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{y^{-\varrho+\nu}(C_{\nu 0} + C_{\nu 1} y + \cdots)}{\mathfrak{p}(y)}\, dy$$

$$= c_{\nu+1,\nu+1} x^{\nu+1} + c_{\nu+1,\nu+2} x^{\nu+2} + \cdots.$$

Demnach ist

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

eine für $|x| \leqq r_0$ konvergente Potenzreihe.

Es sei jetzt $\bar{\varrho} > 0$, aber nicht ganzzahlig. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir $1 < \bar{\varrho} < 2$ an. Wir benutzen die

Bezeichnung

$$\tilde{\varphi}_0(x) = x^\varrho \mathfrak{p}(x),$$

$$\tilde{\varphi}_{\nu+1}(x) = -x^\varrho \mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{y^{-\varrho-1} \tilde{\Phi}_\nu(y)}{\mathfrak{p}(y)} dy, \quad \Phi_\nu(x) = \int_0^x H_2(x,y)\, \tilde{\varphi}_\nu(y)\, dy,$$

so daß

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_\nu(x)$$

die in § 2 ermittelte Lösung der homogenen Integralgleichung

$$\int_0^x H(x,y)\, \tilde{\varphi}(y)\, dy = 0$$

darstellt. Nun ist

$$\varphi_0(x) = x^\varrho \mathfrak{p}(x) \int_{x_0}^x \frac{y^{-\varrho-1} f''(y)}{\mathfrak{p}(y)} dy$$

$$= C_0 \tilde{\varphi}_0(x) + c_{00} + c_{01} x + c_{02} x^2 + \cdots,$$

wo die Konstante C_0 so bestimmt wird, daß $\varphi_0(x)$ für $x = x_0$ verschwindet. Weiter ist

$$\Phi_0(x) = \int_0^x H_2(x,y)(C_0 \tilde{\varphi}_0(y) + c_{00} + c_{01} y + \cdots)\, dy = C_0 \tilde{\varphi}_0(x) + C_{00} x + C_{01} x^2 + \cdots,$$

$$\varphi_1(x) = -x^\varrho \mathfrak{p}(x) \int_{x_0}^x \frac{y^{-\varrho-1} \Phi_0(y)}{\mathfrak{p}(y)} dy$$

$$= -C_0 x^\varrho \mathfrak{p}(x) \int_{x_0}^x \frac{y^{-\varrho-1} \tilde{\Phi}_0(y)}{\mathfrak{p}(y)} dy - x^\varrho \mathfrak{p}(x) \int_{x_0}^x \frac{y^{-\varrho}(C_{00} + C_{01} y + \cdots)}{\mathfrak{p}(y)} dy$$

$$= C_1 \tilde{\varphi}_0(x) + C_0 \tilde{\varphi}_1(x) + c_{11} x + c_{12} x^2 + \cdots,$$

wo die Konstante C_1 so gewählt wird, daß $\varphi_1(x)$ für $x = x_0$ verschwindet. Es ist ferner

$$\Phi_1(x) = C_1 \tilde{\Phi}_0(x) + C_0 \tilde{\Phi}_1(x) + C_{11} x^2 + C_{12} x^3 + \cdots,$$

$$\varphi_2(x) = C_1 \tilde{\varphi}_1(x) + C_0 \tilde{\varphi}_2(x) + c_{22} x^2 + c_{23} x^3 + \cdots$$

und allgemein

$$\varphi_\nu(x) = C_1 \tilde{\varphi}_{\nu-1}(x) + C_0 \tilde{\varphi}_\nu(x) + c_{\nu 0} x^\nu + c_{\nu 1} x^{\nu+1} + \cdots.$$

Demnach hat die nicht homogene Integralgleichung die Lösung

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) = C\tilde{\varphi}(x) + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

wo $C = C_0 + C_1$ ist; es stellt also auch die für $|x| \leqq r_0$ konvergente Potenzreihe

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

eine Lösung der nicht homogenen Integralgleichung dar. — Dieses Resultat gilt auch für den Fall, daß $\bar{\varrho}$ zwischen μ und $\mu+1$ liegt ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$).

Um die Koeffizienten der Potenzreihe für $\varphi(x)$ direkt zu berechnen, setzt man diese Reihe in die Gleichung $D(\varphi(x)) = 0$ ein und vergleicht die Koeffizienten von x^λ. Man erhält so die Rekursionsformel

$$(\varrho - \lambda)\, c_\lambda = \cdots,$$

deren rechte Seite eine lineare, nicht homogene Funktion von $c_{\lambda-1}, \ldots c_1, c_0$ ist. Ist ϱ weder gleich Null noch eine ganze positive Zahl, so sind $c_0, c_1, c_2, \ldots$ bestimmt. Durch die vorangehenden Betrachtungen ist die Konvergenz der Reihe für den Fall bewiesen, daß der reelle Teil von ϱ keinen der Werte $0, 1, 2, \ldots$ hat.

Es gilt also der Satz:

Die Integralgleichung

$$\int_0^x H(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x),$$

wo

$$H(x, y) = a_{10} x + a_{01} y + \cdots, \quad a_{10} + a_{01} \neq 0$$

für $|x| < r$, $|y| < r$ *regulär und* $H(x, x)$ *für* $0 < |x| < r$ *von Null verschieden ist, während* $f(x)$ *für* $|x| < r$ *regulär und* $f(0) = f'(0) = 0$ *ist, wird durch eine für* $|x| < r$ *reguläre Funktion befriedigt, wenn der reelle Teil von*

$$\varrho = -\frac{2a_{10} + a_{01}}{a_{10} + a_{01}}$$

keinen der Werte $0, 1, 2, \ldots$ *hat.*

§ 4.

Bei der Behandlung des Falles $k > 0$ (§§ 5—7) benutzen wir einige Hilfssätze*). Dabei werden den Größen x, y und x_0 nur reelle positive Werte (einschl. Null) beigelegt. Der reelle Teil einer komplexen Größe a oder einer komplexen Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x wird mit $\bar{a}$ bzw. $\bar{f}(x)$ bezeichnet.

Hilfssatz 1. „Wenn

$$\vartheta(x) = -\frac{\alpha}{k x^k} - \frac{\alpha_1}{(k-1)\, x^{k-1}} - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{x}, \quad \bar{\alpha} > 0$$

ist, so ist

$$\int_0^x \left| e^{\vartheta(y)} y^\varrho\, dy \right| \leqq \gamma \left| e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1} \right|,$$

wo γ eine endliche positive Größe darstellt."

---

*) Vgl. die Arbeiten des Verfassers in diesem Journal, Bd. 120 (S. 1), Bd. 133 (S. 19), Bd. 138 (S. 159), im 51. Bd. der Math. Annalen (S. 346) und im 4. Bd. (3. Reihe) des Archiv d. Math. u. Phys. (S. 213).

Es soll nachgewiesen werden, daß

$$I = \int_0^x e^{\bar{\vartheta}(y) - \bar{\vartheta}(x)} y^{\bar{\varrho}} x^{-\bar{\varrho}-k-1} dy$$

höchstens gleich γ ist. Durch die Substitution

$$\frac{1}{y^k} = \frac{1}{x^k} + w$$

geht

$$I = \int_0^x e^{-\frac{\bar{\alpha}}{k}\left(\frac{1}{y^k} - \frac{1}{x^k}\right) - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{\bar{a}_{k-\lambda}}{\lambda}\left(\frac{1}{y^\lambda} - \frac{1}{x^\lambda}\right)} y^{\bar{\varrho}} x^{-\bar{\varrho}-k-1} dy$$

über in

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{\bar{\alpha} w}{k} - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{\bar{a}_{k-\lambda}\left[(1+x^k w)^{\frac{\lambda}{k}} - 1\right]}{\lambda x^\lambda} - \frac{\bar{\varrho}+k+1}{k} \log(1+x^k w)} dw.$$

Die Funktion

$$\frac{\left(1 + z^{\frac{k}{\lambda}}\right)^{\frac{\lambda}{k}} - 1}{z},$$

welche für $z = 0$ den Wert 0 und für $z = \infty$ den Wert 1 annimmt, hat für positive z positive Werte, welche unter einer endlichen Größe M_λ liegen; für $z = x^\lambda w^{\frac{\lambda}{k}}$ $(x > 0, w \geqq 0)$ hat man

$$\frac{(1 + x^k w)^{\frac{\lambda}{k}} - 1}{x^\lambda} \leqq M_\lambda w^{\frac{\lambda}{k}}.$$

Beschränkt man x auf das Intervall $0 \ldots x_0$, so ist

$$\log(1 + x^k w) \leqq \log(1 + x_0^k w),$$

und man hat

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{\bar{\alpha} w}{k} + \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{|\bar{a}_{k-\lambda}|\, M_\lambda w^{\frac{\lambda}{k}}}{\lambda} + \frac{|\bar{\varrho}+k+1|}{k} \log(1+x_0^k w)} dw,$$

wo die rechte Seite, wenn x_0 endlich bleibt, einen endlichen Wert γ hat.

Hilfssatz 2. „Ist

$$\vartheta(x) = -\frac{\alpha}{k x^k} - \frac{\alpha_1}{(k-1)x^{k-1}} - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{x}, \quad \bar{\alpha} > 0,$$

$$\mathfrak{p}(x) = e^{a_{k+1} x + \frac{1}{2} a_{k+2} x^2 + \cdots}$$

und gilt für kleine positive x die asymptotische Gleichung

$$f(x) \backsim e^{\vartheta(x)} x^\varrho \mathfrak{p}(x)\,(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots),$$

so besteht eine asymptotische Gleichung

$$\int_0^x f(y)\,dy \backsim e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1} \mathfrak{p}(x)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots);$$

dabei ist

$$(a)\quad\begin{cases}\alpha c_0 = b_0,\\ \alpha c_1 + \alpha_1 c_0 = b_1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha c_{k-1} + \alpha_1 c_{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} c_0 = b_{k-1},\\ \alpha c_\nu + \alpha_1 c_{\nu-1} + \cdots + \alpha_{k-1} c_{\nu-k+1} + (\varrho+\nu+1) c_{\nu-k}\\ \qquad + \alpha_{k+1} c_{\nu-k-1} + \cdots + \alpha_{\nu-1} c_1 + \alpha_\nu c_0 = b_\nu \quad (\nu \geqq k).\text{“}\end{cases}$$

Es ist

$$d[e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+\nu+k+1} \mathfrak{p}(y)] = e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+\nu} \mathfrak{p}(y)[\alpha + \alpha_1 y + \cdots + \alpha_{k-1} y^{k-1} + (\varrho+\nu+k+1) y^k + \alpha_{k+1} y^{k+1} + \cdots] dy.$$

Unter Anwendung der Bezeichnung

$$J_\nu = \int_0^x e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+\nu} \mathfrak{p}(y) dy$$

folgt daraus

$$e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+\nu+k+1} \mathfrak{p}(x)$$
$$= \alpha J_\nu + \alpha_1 J_{\nu+1} + \cdots + \alpha_{k-1} J_{\nu+k-1} + (\varrho+\nu+k+1) J_{\nu+k} + \alpha_{k+1} J_{\nu+k+1} + \cdots$$
$$= \alpha J_\nu + \alpha_1 J_{\nu+1} + \cdots + \alpha_{k-1} J_{\nu+k-1} + (\varrho+\nu+k+1) J_{\nu+k} + \alpha_{k+1} J_{\nu+k+1} + \cdots$$
$$+ \alpha_{n-\nu+k} J_{n+k} + \int_0^x e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+n+k+1} \mathfrak{p}(y) (\alpha_{n-\nu+k+1} + \alpha_{n-\nu+k+2} y + \cdots) dy.$$

Wenn man die zu $\nu = 0, 1, \ldots n$ gehörigen Gleichungen mit den durch die Gleichungen (a) bestimmten Größen $c_0, c_1, \ldots c_n$ multipliziert und addiert, erhält man

$$b_0 J_0 + b_1 J_1 + \cdots + b_n J_n = e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1} \mathfrak{p}(x)(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n)$$
$$+ B_1 J_{n+1} + \cdots + B_k J_{n+k} + \int_0^x e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+n+k+1} \mathfrak{p}(y) B(y) dy,$$

wo $\lim_{y=0} B(y)$ endlich ist. Es ist

$$f(y) = e^{\vartheta(y)} y^\varrho \mathfrak{p}(y)(b_0 + b_1 y + \cdots + b_n y^n + \beta_n y^n), \quad \lim_{y=+0} \beta_n(y) = 0,$$
$$\int_0^x f(y) dy = b_0 J_0 + b_1 J_1 + \cdots + b_n J_n + \int_0^x e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+n} \mathfrak{p}(y) \beta_n(y) dy$$
$$= e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1} \mathfrak{p}(x) (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n)$$
$$+ \int_0^x e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+n} \mathfrak{p}(y) (\beta_n(y) + B_1 y + \cdots + B_k y^k + y^{k+1} B(y)) dy$$
$$= e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1} \mathfrak{p}(x) (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \gamma_n x^n),$$
$$\gamma_n = e^{-\vartheta(x)} x^{-\varrho-n-k-1} \int_0^x (\beta_n(y) + B_1 y + \cdots + B_k y^k + y^{k+1} B(y)) e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+n} \mathfrak{p}(y) dy.$$

Für $y \leqq x$ ist

$$|\beta_n(y) + B_1 y + \cdots + B_k y^k + y^{k+1} B(y)| \leqq \mathfrak{B}(x), \quad \lim_{x=+0} \mathfrak{B}(x) = 0,$$

also nach Hilfssatz 1

$$|\gamma_n| \leqq \mathfrak{B}(x) e^{-\bar{\vartheta}(x)} x^{-\bar{\varrho}-n-k-1} \int_0^x e^{\bar{\vartheta}(y)} y^{\bar{\varrho}+n} dy \leqq \gamma \mathfrak{B}(x),$$

wo γ eine endliche positive Größe ist. Demnach ist

$$\lim_{x=+0} \gamma_n = 0.$$

Ein besonderer Fall des Hilfssatzes 2 ist der folgende Satz:

„Für kleine positive x gilt die asymptotische Gleichung

$$\int_0^x e^{\vartheta(y)} y^\varrho dy \backsim e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots);$$

$c_0, c_1, c_2, \ldots$ werden aus den Gleichungen berechnet:

$$\alpha c_0 = 1,$$
$$\alpha c_1 + \alpha_1 c_0 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha c_{k-1} + \alpha_1 c_{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} c_0 = 0,$$
$$\alpha c_\nu + \alpha_1 c_{\nu-1} + \cdots + \alpha_{k-1} c_{\nu-k+1} + (\varrho + \nu + 1) c_{\nu-k} = 0 \quad (\nu \geqq k).“ —$$

Hilfssatz 3. „Wenn

$$\vartheta(x) = -\frac{\alpha}{k x^k} - \frac{\alpha_1}{(k-1) x^{k-1}} - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{x}, \quad \bar{\alpha} < 0$$

und $x \leqq x_0$ ist, so hat man für hinreichend kleine positive Werte von x_0

$$\int_{x_0}^x |e^{\vartheta(y)} y^\varrho dy| \leqq \gamma |e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}|,$$

wo γ eine endliche positive Größe darstellt.“

Der Ausdruck

$$I = \int_x^{x_0} e^{\bar{\vartheta}(y) - \bar{\vartheta}(x)} y^{\bar{\varrho}} x^{-\bar{\varrho}-k-1} dy$$

geht durch die Substitution

$$u = \frac{1}{x^k} - \frac{1}{y^k}$$

über in

$$I = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{1}{x^k} - \frac{1}{x_0^k}} e^{\frac{\bar{\alpha} u}{k} - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{\bar{\alpha}_{k-\lambda} [(1-x^k u)^{\frac{\lambda}{k}} - 1]}{\lambda x^\lambda} - \frac{\bar{\varrho}+k+1}{k} \log(1-x^k u)} du.$$

Die Funktion

$$-\frac{\bar{\alpha}_{k-\lambda}}{\lambda} \frac{(1-z^{\frac{k}{\lambda}})^{\frac{\lambda}{k}} - 1}{z},$$

welche für $z=0$ den Wert 0, für $z=1$ den Wert $\frac{\bar{\alpha}_{k-\lambda}}{\lambda}$ annimmt, liegt für $0 \leqq z \leqq 1$ unter einer endlichen Größe M_λ. Durch Einsetzen des zwischen 0 und 1 gelegenen Wertes

$$z = x^\lambda u^{\frac{\lambda}{k}}$$

erhält man

$$-\frac{\bar{\alpha}_{k-\lambda}}{\lambda}\,\frac{(1-x^k u)^{\frac{\lambda}{k}}-1}{x^\lambda} \leqq M_\lambda u^{\frac{\lambda}{k}}.$$

Demnach ist

$$I \leqq \frac{1}{k}\int_0^{\frac{1}{x^k}-\frac{1}{x_0^k}} e^{\frac{\bar{\alpha}u}{k}+\sum_{\lambda=1}^{k} M_\lambda u^{\frac{\lambda}{k}}-\frac{\bar{\varrho}+k+1}{k}\log(1-x^k u)}\,du$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^{\frac{1}{x^k}-\frac{1}{x_0^k}} e^{\varphi(u)}\,e^{\psi(u)}\,du,$$

$$\varphi(u) = \frac{\bar{\alpha}u}{2k} + \sum_{\lambda=1}^{k} M_\lambda u^{\frac{\lambda}{k}},$$

$$\psi(u) = \frac{\bar{\alpha}u}{2k} - \frac{\bar{\varrho}+k+1}{k}\log(1-x^k u).$$

Es ist

$$\psi'(u) = \frac{\bar{\alpha}}{2k} + \frac{\bar{\varrho}+k+1}{k}\,\frac{x^k}{1-x^k u} \leqq \frac{\bar{\alpha}}{2k} + \frac{\bar{\varrho}+k+1}{k}\,x_0^k$$

wegen

$$\frac{x^k}{1-x^k u} = y^k \leqq x_0^k;$$

wenn wir im Falle $\bar{\varrho}+k+1>0$

$$x_0 < \sqrt[k]{\frac{-\bar{\alpha}}{2(\bar{\varrho}+k+1)}}$$

nehmen, ist $\psi'(u) \leqq 0$, also $\psi(u) \leqq \psi(0) = 0$ und

$$e^{\psi(u)} \leqq 1.$$

Demnach ist

$$I \leqq \frac{1}{k}\int_0^{\frac{1}{x^k}-\frac{1}{x_0^k}} e^{\varphi(u)}\,du \leqq \frac{1}{k}\int_0^{\infty} e^{\varphi(u)}\,du = \gamma. \quad -$$

Hilfssatz 4. „Ist

$$\vartheta(x) = -\frac{\alpha}{kx^k} - \frac{\alpha_1}{(k-1)x^{k-1}} - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{x}, \quad \bar{\alpha} < 0,$$

$$\mathfrak{p}(x) = e^{a_{k-1}x+\frac{1}{2}a_{k+2}x^2+\cdots}$$

und gilt für kleine positive x die asymptotische Gleichung

$$f(x) \backsim e^{\vartheta(x)} x^{\varrho}\, \mathfrak{p}(x)\,(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots),$$

so besteht eine asymptotische Gleichung

$$\int_{x_0}^{x} f(y)\,dy \backsim e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}\, \mathfrak{p}(x)\,(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots);$$

dabei werden $c_0, c_1, c_2, \ldots$ aus denselben Gleichungen (a) wie im Hilfssatz 2 berechnet."

Wenn man

$$J_\nu = \int_{x_0}^{x} e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+\nu}\, \mathfrak{p}(y)\,dy$$

setzt, ist

$$\begin{aligned} &e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+\nu+k+1}\, \mathfrak{p}(x) - e^{\vartheta(x_0)} x_0^{\varrho+\nu+k+1}\, \mathfrak{p}(x_0) \\ &= \alpha J_\nu + \alpha_1 J_{\nu+1} + \cdots + \alpha_{k-1} J_{\nu+k-1} + (\varrho+\nu+k+1) J_{\nu+k} + \alpha_{k+1} J_{\nu+k+1} + \cdots + \alpha_{n-\nu+k} J_{n+k} \\ &\quad + \int_{x_0}^{x} e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+n+k+1}\, \mathfrak{p}(y)\,(\alpha_{n-\nu+k+1} + \alpha_{n-\nu+k+2} y + \cdots)\,dy. \end{aligned}$$

Durch das oben angewandte Verfahren ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} f(y)\,dy &= e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}\, \mathfrak{p}(x)\,(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n) \\ &\quad - e^{\vartheta(x_0)} x_0^{\varrho+k+1}\, \mathfrak{p}(x_0)\,(c_0 + c_1 x_0 + \cdots + c_n x_0^n) \\ &\quad + \int_{x_0}^{x} e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+n}\, \mathfrak{p}(y)\,(\beta_n(y) + B_1 y + \cdots + B_k y^k + y^{k+1} B(y))\,dy \\ &= e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}\, \mathfrak{p}(x)\,(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \gamma_n x^n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_n &= -e^{\vartheta(x_0)-\vartheta(x)} x^{-\varrho-k-n-1} x_0^{\varrho+k+1}\, \mathfrak{p}(x_0)\,(c_0 + c_1 x_0 + \cdots + c_n x_0^n) \\ &\quad + e^{-\vartheta(x)} x^{-\varrho-k-n-1} \int_{x_0}^{x} e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+n}\, \mathfrak{p}(y)\,(\beta_n(y) + B_1 y + \cdots + B_k y^k + y^{k+1} B(y))\,dy. \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{x=+0} e^{-\vartheta(x)} x^{-\varrho-k-n-1} = 0$$

hat das erste Glied von γ_n den Grenzwert Null. Da

$$\beta_n(y) = b_{n+1} y + y\,\beta_{n+1}(y)$$

ist, so ist für $y \leqq x_0$

$$\begin{aligned} &|\beta_n(y) + B_1 y + \cdots + B_k y^k + y^{k+1} B(y)| \\ &\leqq y\,|b_{n+1} + \beta_{n+1}(y) + B_1 + \cdots + B_k y^{k-1} + y^k B(y)| \leqq \mathfrak{B}_0 y, \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{B}_0$ eine endliche Größe ist; daher ist der absolute Betrag des zweiten Gliedes von γ_n höchstens gleich

$$\mathfrak{B}_0 p\,|e^{-\vartheta(x)} x^{-\varrho-n-k-1}| \int_{x_0}^{x} |e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+n+1}\,dy| \leqq \mathfrak{B}_0 p \gamma x,$$

wo γ endlich ist (Hilfssatz 3). Demnach ist

$$\lim_{x=+0} \gamma_n = 0.$$

Behufs späterer Verwendung geben wir den Hilfssätzen 2 und 4 eine andere Form.

Die Funktion

$$\varphi(x) = e^{-\vartheta(x)} x^{-\varrho-k-1} \frac{1}{\mathfrak{p}(x)} \int_{\xi}^{x} e^{\vartheta(y)} y^{\varrho} \mathfrak{p}(y) g(y)\, dy,$$

wo für kleine positive y

$$g(y) \backsim b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \cdots$$

ist und wo $\xi = 0$ oder $\xi = x_0$ gesetzt wird, je nachdem $\bar{\alpha} > 0$ oder $\bar{\alpha} < 0$ ist, genügt der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi(x))}{dx} + (\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots)\varphi(x) = g(x),$$

wo $\alpha_k = \varrho$ ist. Es besteht die asymptotische Gleichung

$$\varphi(x) \backsim c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots;$$

d. h. es ist bei beliebigem n

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \gamma_n x^n; \quad \lim_{x=+0} \gamma_n = 0.$$

Die lineare Differentialgleichung wird durch die Reihe $\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ formell befriedigt; denn wenn man diese Reihe in die Differentialgleichung einsetzt und die Koeffizienten von $x^0, x^1, \ldots x^{k-1}, x^{\nu}$ $(\nu \geqq k)$ vergleicht, erhält man die Gleichungen (a). Wenn man

$$S_n = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

setzt, ist

$$\frac{d(x^{k+1} S_n)}{dx} + (\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots) S_{n+k} = g(x) + x^{n+k+1} \mathfrak{P}(x),$$

wo $\mathfrak{P}(x)$ eine konvergente oder asymptotische Potenzreihe ist. Die Funktion

$$\varphi(x) = S_n + \gamma_n x^n = S_{n+k} + \gamma_{n+k} x^{n+k}$$

genügt der linearen Differentialgleichung, es ist also

$$\frac{d(x^{k+1} S_n)}{dx} + x^{n+k+1} \frac{d\gamma_n}{dx} + (n+k+1)\gamma_n x^{n+k} + (\alpha + \alpha_1 x + \cdots) S_{n+k} + (\alpha + \alpha_1 x + \cdots) x^{n+k} \gamma_{n+k} = g(x)$$

oder

$$\lim_{x=+0} x \frac{d\gamma_n}{dx} = 0.$$

Wegen

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = c_1 + 2c_2 x + \cdots + n c_n x^{n-1} + \gamma'_{n-1} x^{n-1},$$

$$\gamma'_{n-1} = x\frac{d\gamma_n}{dx} + n\gamma_n, \quad \lim_{x=+0}\gamma'_{n-1} = 0$$

besteht die asymptotische Gleichung

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \backsim c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots.$$

Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen ersetzen wir $\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$ durch $-\alpha - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \cdots$ und demgemäß $\vartheta(x)$ durch $-\vartheta(x)$, $\mathfrak{p}(x)$ durch $\frac{1}{\mathfrak{p}(x)}$; wenn wir noch ϱ durch $-\varrho - k - 1$ ersetzen, haben wir den

Hilfssatz 5. „Die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi(x))}{dx} - (\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots)\varphi(x) = g(x)$$

hat, wenn für kleine positive x

$$g(x) \backsim b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

ist und

$$\vartheta(x) = -\frac{\alpha}{kx^k} - \frac{\alpha_1}{(k-1)x^{k-1}} - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{x}, \quad \varrho = \alpha_k - k - 1,$$

$$\mathfrak{p}(x) = e^{\alpha_{k+1}x + \frac{1}{2}\alpha_{k+2}x^2 + \cdots}$$

gesetzt wird, die Lösung

$$\varphi(x) = e^{\vartheta(x)} x^{\varrho}\mathfrak{p}(x)\int_{\xi}^{x} \frac{e^{-\vartheta(y)} y^{-\varrho-k-1} g(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy,$$

wo $\xi = 0$ für $\bar{\alpha} < 0$, $\xi = x_0$ für $\bar{\alpha} > 0$ ist. Für kleine positive x wird $\varphi(x)$ durch die der Differentialgleichung formell genügende Reihe asymptotisch dargestellt". —

Hilfssatz 6. „Die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi(x))}{dx} - (\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots)\varphi(x) = g(x)$$

hat, wenn für kleine positive x die asymptotische Gleichung

$$g(x) \backsim e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}\ (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)$$

gilt*), die Lösung

$$\varphi(x) = e^{\vartheta(x)} x^{\varrho}\mathfrak{p}(x)\int_{0}^{x} \frac{e^{-\vartheta(y)} y^{-\varrho-k-1} g(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy$$

mit der asymptotischen Darstellung

$$\varphi(x) \backsim e^{\vartheta(x)} x^{\varrho}\,(c_1 x + c_2 x^2 + \cdots);$$

dabei ist

*) Die Größen $\vartheta(x)$, ϱ und $\mathfrak{p}(x)$ sind wie in Hilfssatz 5 definiert.

$$c_1 = b_0,$$
$$\nu c_\nu = \alpha_{k+1} c_{\nu-1} + \alpha_{k+2} c_{\nu-2} + \cdots + \alpha_{k+\nu-1} c_1 + b_{\nu-1}\text{“}. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

Setzt man nämlich

$$\varphi(x) = e^{\vartheta(x)} x^\varrho \tilde{\varphi}(x), \quad g(x) = e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1} \tilde{g}(x),$$

so gilt die Differentialgleichung

$$\frac{d\tilde{\varphi}(x)}{dx} - (\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} x + \cdots)\tilde{\varphi}(x) = \tilde{g}(x), \ \tilde{g}(x) \backsim b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

mit der partikulären Lösung

$$\tilde{\varphi}(x) = \mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{g(y)}{\mathfrak{p}(y)} dy.$$

Da die zu integrierende Funktion durch eine Potenzreihe von y asymptotisch dargestellt wird und da eine asymptotische Reihe nach den für konvergente Reihen gültigen Regeln integriert wird, so hat man eine asymptotische Gleichung

$$\tilde{\varphi}(x) \backsim c_1 x + c_2 x^2 + \cdots.$$

Die Differentialgleichung für $\tilde{\varphi}(x)$ wird durch die Reihe $c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ formell befriedigt. —

Hilfssatz 7. „Wenn für $0 \leqq x \leqq x_0$

$$|\varphi_\nu(x)| \leqq C_\nu x^\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist und wenn die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu x_0^\nu$ konvergiert, wenn ferner für kleine positive x die asymptotischen Gleichungen

$$\varphi_\nu(x) \backsim c_{\nu\nu} x^\nu + c_{\nu,\nu+1} x^{\nu+1} + \cdots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

bestehen, so gilt, wenn

$$c_\nu = c_{0\nu} + c_{1\nu} + \cdots + c_{\nu\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

gesetzt wird, die asymptotische Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) \backsim c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots.\text{“}$$

Wenn unter n eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ verstanden wird, ist

$$\frac{|\varphi_{n+\nu}(x)|}{x^n} \leqq C_{n+\nu} x^\nu,$$

so daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{n+\nu}(x)}{x^n}$$

für $0 \leqq x \leqq x_0$ absolut und gleichmäßig konvergent ist. Es ist für $\nu = 0, 1, \ldots n$

$$\varphi_\nu(x) = c_{\nu\nu}x^\nu + \cdots + c_{\nu n}x^n + \varepsilon_{\nu n}x^n, \quad \lim_{x=+0} \varepsilon_{\nu n} = 0$$

und für $\nu = n+1, n+2, \ldots$

$$\varphi_\nu(x) = \varepsilon_{\nu n}x^n, \quad \lim_{x=+0} \varepsilon_{\nu n} = 0.$$

Da die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{n+\nu}(x)}{x^n} = c_{nn} + \varepsilon_{nn} + \varepsilon_{n+1,n} + \varepsilon_{n+2,n} + \cdots$$

für $0 \leqq x \leqq x_0$ gleichmäßig konvergent ist, so kann man, wenn eine beliebig kleine positive Größe δ gegeben ist, $p \geqq n$ so groß wählen, daß für $0 \leqq x \leqq x_0$

$$\left| \varepsilon_{p+1,n} + \varepsilon_{p+2,n} + \cdots \right| < \frac{\delta}{2},$$

und hierauf $x' \leqq x_0$ so klein, daß für $x \leqq x'$

$$\left| \varepsilon_{0n} + \varepsilon_{1n} + \cdots + \varepsilon_{pn} \right| < \frac{\delta}{2}$$

ist. Setzt man

$$\varepsilon_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{\nu n},$$

so ist $|\varepsilon_n| < \delta$ für $x \leqq x'$. Es besteht die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \varepsilon_n x^n, \quad \lim_{x=+0} \varepsilon_n = 0.$$

§ 5.

Wir wenden uns zu der homogenen Integralgleichung

$$\int_0^x H(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0,$$

$$H(x,y) = y^{k+1} + H_1(y)\, \frac{y-x}{1!} + \cdots, \quad H_1(y) = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \cdots, \qquad (k=1,2,\ldots)$$

wo $\bar{\alpha} > 0$ sein möge. Durch zweimalige Differentiation entsteht die Gleichung

$$D(\varphi(x)) = \frac{d(x^{k+1}\varphi(x))}{dx} - H_1(x)\, \varphi(x) + \int_0^x H_2(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0.$$

Wir lösen zunächst die linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi_0(x))}{dx} - H_1(x)\, \varphi_0(x) = 0,$$

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi_{\nu+1}(x))}{dx} - H_1(x)\, \varphi_{\nu+1}(x) = -\Phi_\nu(x), \quad \Phi_\nu(x) = \int_0^x H_2(x, y)\, \varphi_\nu(y)\, dy. \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

Die erste dieser Differentialgleichungen hat die Lösung

$$\varphi_0(x) = e^{\vartheta(x)} x^{\varrho}\, \mathfrak{p}(x),$$

wo

$$\vartheta(x) = -\frac{a}{k x^k} - \frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}} - \cdots - \frac{a_{k-1}}{x},\quad \varrho = \alpha_k - k - 1,$$

$$\mathfrak{p}(x) = e^{a_{k+1}x + \frac{1}{2}a_{k+2}x^2 + \cdots}$$

ist. Von der $(\nu+1)$-ten Differentialgleichung benutzen wir die Lösung

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -e^{\vartheta(x)} x^{\varrho}\, \mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{e^{-\vartheta(y)} y^{-\varrho-k-1}\, \Phi_\nu(y)}{\mathfrak{p}(y)}\, dy.$$

Für $x \leqq x_0$, $y \leqq y_0$ sei

$$|\mathfrak{p}(x)| \leqq p,\quad \left|\frac{1}{\mathfrak{p}(x)}\right| \leqq q,\quad |H(x,y)| \leqq M,$$

ferner in Übereinstimmung mit Hilfssatz 1

$$\int_0^x e^{\bar{\vartheta}(y)} y^{\bar{\varrho}}\, dy \leqq \gamma\, e^{\bar{\vartheta}(x)} x^{\bar{\varrho}+k+1}.$$

Dann ist für $x \leqq x_0$

$$|\varphi_0(x)| \leqq p\, e^{\bar{\vartheta}(x)} x^{\bar{\varrho}},$$

$$|\varphi_\nu(x)| \leqq C_\nu\, e^{\bar{\vartheta}(x)} x^{\bar{\varrho}+\nu},\quad C_\nu = \frac{p(Mpq\gamma)^\nu}{\nu!}.$$

Denn unter Voraussetzung dieser Ungleichung ist

$$|\Phi_\nu(x)| \leqq C_\nu M \int_0^x e^{\bar{\vartheta}(y)} y^{\bar{\varrho}+\nu}\, dy$$

oder, da im Integrationsintervall $y^\nu \leqq x^\nu$ ist,

$$|\Phi_\nu(x)| \leqq C_\nu M x^\nu \int_0^x e^{\bar{\vartheta}(y)} y^{\bar{\varrho}}\, dy \leqq C_\nu M\gamma\, e^{\bar{\vartheta}(x)} x^{\bar{\varrho}+\nu+k+1}.$$

Weiter ist

$$|\varphi_{\nu+1}(x)| \leqq C_\nu Mpq\gamma\, e^{\bar{\vartheta}(x)} x^{\bar{\varrho}} \int_0^x y^\nu\, dy = \frac{C_\nu Mpq\gamma}{\nu+1} e^{\bar{\vartheta}(x)} x^{\bar{\varrho}+\nu+1}.$$

Demnach ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\vartheta(x)} x^{-\varrho} \varphi_\nu(x)$$

für $0 \leqq x \leqq x_0$ absolut und gleichmäßig konvergent. Dasselbe gilt um so mehr für die Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x),$$

welche, wie man durch die in § 2 benutzte Schlußweise erkennt, der Gleichung $D(\varphi(x)) = 0$ genügt. Durch zweimalige Integration dieser Gleichung erhält man die Gleichungen

$$x^{k+1}\varphi(x) + \int_0^x H_1(x, y)\,\varphi(y)\,dy = C,$$

$$\int_0^x H(x, y)\,\varphi(y)\,dy = Cx + C';$$

für $\lim x = +0$ ergibt sich $C = 0$, $C' = 0$, so daß $\varphi(x)$ der ursprünglichen Integralgleichung genügt.

Für die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ ergeben sich asymptotische Darstellungen. Zunächst ist

$$\varphi_0(x) = e^{\vartheta(x)} x^\varrho (c_{00} + c_{01}\,x + c_{02}\,x^2 + \cdots), \quad c_{00} = 1.$$

Wir zeigen, daß

$$\varphi_\nu(x) \backsim e^{\vartheta(x)} x^\varrho (c_{\nu\nu}\,x^\nu + c_{\nu,\nu+1}\,x^{\nu+1} + \cdots)$$

ist; d. h. für $n \geqq \nu$ ist

$$\varphi_\nu(x) = e^{\vartheta(x)} x^\varrho (c_{\nu\nu}\,x^\nu + \cdots + c_{\nu n}\,x^n + \varepsilon_{\nu n}\,x^n), \quad \lim_{x=+\infty} \varepsilon_{\nu n} = 0.$$

Es ist nämlich

$$H_2(x, y)\,\varphi_\nu(y) = [\mathfrak{H}_{\nu\nu}(x)\,y^\nu + \cdots + \mathfrak{H}_{\nu n}(x)\,y^n + \chi_{\nu n}(x, y)\,y^n]\,e^{\vartheta(y)} y^\varrho;$$

dabei sind $\mathfrak{H}_{\nu\nu}, \ldots \mathfrak{H}_{\nu n}$ Potenzreihen von x und $\chi_{\nu n}$ eine Funktion von x, y, welche für $y \leqq x$ die Bedingung erfüllt:

$$|\chi_{\nu n}(x, y)| \leqq \chi(x), \quad \lim_{x=+0} \chi(x) = 0.$$

Unter Anwendung der Bezeichnung

$$J_\mu = \int_0^x e^{\vartheta(y)}\,y^{\varrho+\mu}\,dy$$

ist

$$\Phi_\nu(x) = \int_0^x H_2(x,y)\,\varphi_\nu(y)\,dy = \mathfrak{H}_{\nu\nu}(x)\,J_\nu + \cdots + \mathfrak{H}_{\nu n}(x)\,J_n + \int_0^x \chi_{\nu n}(x, y)\,e^{\vartheta(y)}\,y^{\varrho+n}\,dy.$$

Setzt man das letzte Glied gleich

$$e^{\vartheta(x)}\,x^{\varrho+n+k+1}\,\zeta(x),$$

so ist nach Hilfssatz 1

$$|\zeta(x)| \leqq \chi(x)\,e^{-\bar{\vartheta}(x)}\,x^{-\bar{\varrho}-n-k-1} \int_0^x e^{\bar{\vartheta}(y)}\,y^{\bar{\varrho}+n}\,dy \leqq \gamma\,\chi(x),$$

also $\lim_{x=+0} \zeta(x) = 0$. Beachtet man die Gleichungen (Hilfssatz 2, Zusatz)

$$J_\mu = e^{\vartheta(x)}\,x^{\varrho+\mu+k+1}\,(\gamma_{\mu 0} + \gamma_{\mu 1}\,x + \cdots + \gamma_{\mu,n-\mu}\,x^{n-\mu} + \delta_{\mu,n-\mu}\,x^{n-\mu}),$$

$$\lim_{x=+0} \delta_{\mu,n-\mu}(x) = 0, \qquad (\mu = \nu, \ldots n)$$

so sieht man, daß eine Gleichung von der Form

$$\Phi_\nu(x) = e^{\vartheta(x)}\,x^{\varrho+k+1}\,(C_{\nu\nu}\,x^\nu + \cdots + C_{\nu n}\,x^n + \eta_{\nu n}\,x^n), \quad \lim_{x=+0} \eta_{\nu n}(x) = 0$$

oder die asymptotische Gleichung

$$\Phi_\nu(x) \sim e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1} (C_{\nu\nu} x^\nu + C_{\nu,\nu+1} x^{\nu+1} + \cdots)$$

besteht*). Aus der Formel für $\varphi_{\nu+1}(x)$ folgt

$$\varphi_{\nu+1}(x) \sim -e^{\vartheta(x)} x^\varrho \mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{C_{\nu\nu} y^\nu + C_{\nu,\nu+1} y^{\nu+1} + \cdots}{\mathfrak{p}(y)}\, dy$$

oder

$$\varphi_{\nu+1}(x) \sim e^{\vartheta(x)} x^\varrho (c_{\nu+1,\nu+1} x^{\nu+1} + c_{\nu+1,\nu+2} x^{\nu+2} + \cdots).$$

Wir haben gesehen, daß für $0 \leqq x \leqq x_0$

$$|e^{-\vartheta(x)} x^{-\varrho} \varphi_\nu(x)| \leqq \frac{p(Mpq\gamma x)^\nu}{\nu!} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist und daß die asymptotischen Gleichungen

$$e^{-\vartheta(x)} x^{-\varrho} \varphi_\nu(x) \sim c_{\nu\nu} x^\nu + c_{\nu,\nu+1} x^{\nu+1} + \cdots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

bestehen. Daraus ergibt sich nach Hilfssatz 7, wenn man

$$c_\nu = c_{0\nu} + c_{1\nu} + \cdots + c_{\nu\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);\ c_0 = c_{00} = 1$$

setzt, die asymptotische Gleichung

$$e^{-\vartheta(x)} x^{-\varrho} \varphi(x) \sim c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots.$$

Es ist also

$$\varphi(x) = e^{\vartheta(x)} x^\varrho\ (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \varepsilon_n x^n),\ \lim_{x=+0} \varepsilon_n(x) = 0.$$

Wir weisen nach, daß eine Reihe von der Form

$$\varphi(x) = e^{\vartheta(x)} x^\varrho (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)$$

der Gleichung $D(\varphi(x)) = 0$ formell genügt. Der Sinn dieser Behauptung ist folgender. Durch formale Rechnung erhält man

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi(x))}{dx} = e^{\vartheta(x)} x^\varrho \left[(\alpha + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k) \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^\lambda + x^{k+1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda + 1) c_{\lambda+1} x^\lambda\right],$$

$$H_1(x)\varphi(x) = e^{\vartheta(x)} x^\varrho\ (\alpha + \alpha_1 x + \cdots) \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^\lambda$$

und, wenn

$$H_2(x, y) = \mathfrak{h}_0(x) + \mathfrak{h}_1(x) y + \mathfrak{h}_2(x) y^2 + \cdots$$

ist,

$$\int_0^x H_2(x, y)\varphi(y)\, dy = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (c_\lambda \mathfrak{h}_0(x) + c_{\lambda-1} \mathfrak{h}_1(x) + \cdots + c_0 \mathfrak{h}_\lambda(x)) \int_0^x e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+\lambda}\, dy$$

oder, wenn nach Hilfssatz 2 (Zusatz)

$$\int_0^x e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+\lambda}\, dy = e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+\lambda+k+1}\ (\gamma_{\lambda 0} + \gamma_{\lambda 1} x + \cdots)$$

gesetzt wird,

---

*) Man kann auch den Hilfssatz 2 anwenden, indem man $b_0, b_1, b_2, \ldots$ als Potenzreihen von x voraussetzt, so daß auch $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Potenzreihen von x werden.

$$\int_0^x H_2(x,y)\,\varphi(y)\,dy = \sum_{\lambda=0}^{\infty} e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+\lambda+k+1} (c_\lambda \mathfrak{h}_0(x) + c_{\lambda-1}\mathfrak{h}_1(x) + \cdots)(\gamma_{\lambda 0} + \gamma_{\lambda 1} x + \cdots).$$

Der durch $e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}$ dividierte Ausdruck $D(\varphi(x))$ ist gleich

$$-(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}x + \cdots)\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^\lambda + \sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+1)\,c_{\lambda+1}x^\lambda$$
$$+ \sum_{\lambda=0}^{\infty} x^\lambda (c_\lambda \mathfrak{h}_0(x) + c_{\lambda-1}\mathfrak{h}_1(x) + \cdots)(\gamma_{\lambda 0} + \gamma_{\lambda 1} x + \cdots) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} E_\lambda x^\lambda.$$

Die Gleichung

$$E_0 = c_1 + (-\alpha_{k+1} + \mathfrak{h}_0(0)\gamma_{00})\,c_0 = 0$$

ergibt c_1, nachdem c_0 beliebig, etwa gleich 1, angenommen ist. Die Gleichung

$$E_\lambda = (\lambda+1)c_{\lambda+1} + (-\alpha_{k+1} + \mathfrak{h}_0(0)\gamma_{\lambda 0})c_\lambda + \cdots = 0$$

drückt $c_{\lambda+1}$ durch $c_\lambda, \ldots c_1, c_0$ aus.

Die auf diese Weise formal berechnete Reihe für die Funktion $\varphi(x)$ stimmt, wie wir zeigen werden, mit der Reihe überein, welche die Funktion $\varphi(x)$ asymptotisch darstellt.

Der durch $e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}$ dividierte Ausdruck

$$D_0(\varphi_0(x)) = \frac{d(x^{k+1}\varphi_0(x))}{dx} - H_1(x)\,\varphi_0(x)$$

ist, wenn man

$$\varphi_0(x) = e^{\vartheta(x)} x^\varrho (c_{00} + c_{01}x + c_{02}x^2 + \cdots)$$

setzt, gleich

$$-(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}x + \cdots)\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{0\lambda}x^\lambda + \sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+1)\,c_{0,\lambda+1}x^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} E_{0\lambda}x^\lambda,$$

und es ist

$$E_{0\lambda} = 0. \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

Nach Hilfssatz 6 genügt die Reihe

$$\varphi_{\nu+1}(x) = e^{\vartheta(x)} x^\varrho (c_{\nu+1,\nu+1}x^{\nu+1} + c_{\nu+1,\nu+2}x^{\nu+2} + \cdots),$$

welche die Funktion $\varphi_{\nu+1}(x)$ asymptotisch darstellt, der Differentialgleichung

$$D_{\nu+1}(\varphi_{\nu+1}(x)) = \frac{d(x^{k+1}\varphi_{\nu+1}(x))}{dx} - H_1(x)\,\varphi_{\nu+1}(x) + \int_0^x H_2(x,y)\,\varphi_\nu(y)\,dy = 0$$

formal. Der durch $e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}$ dividierte Ausdruck $D_{\nu+1}(\varphi_{\nu+1}(x))$ wird bei formaler Rechnung

$$-(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}x + \cdots)\sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} c_{\nu+1,\lambda}x^\lambda + \sum_{\lambda=\nu}^{\infty}(\lambda+1)c_{\nu+1,\lambda+1}x^\lambda$$
$$+ \sum_{\lambda=\nu}^{\infty} x^\lambda (c_{\nu\lambda}\mathfrak{h}_0(x) + c_{\nu,\lambda-1}\mathfrak{h}_1(x) + \cdots + c_{\nu\nu}\mathfrak{h}_{\lambda-\nu}(x))(\gamma_{\lambda 0} + \gamma_{\lambda 1}x + \cdots) = \sum_{\lambda=\nu}^{\infty} E_{\nu+1,\lambda}x^\lambda;$$

es ist

$$E_{\nu+1,\lambda} = 0. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots; \lambda = \nu, \nu+1, \ldots).$$

Wenn man

$$c_\nu = c_{0\nu} + c_{1\nu} + \cdots + c_{\nu\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

setzt, so daß

$$e^{\vartheta(x)} x^\varrho (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)$$

die oben eingeführte Reihe ist, welche die Lösung $\varphi(x)$ der Integralgleichung asymptotisch darstellt, so ist

$$E_\lambda = E_{0\lambda} + E_{1\lambda} + \cdots + E_{\lambda+1,\lambda},$$

es ist also

$$E_\lambda = 0, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

d. h. die asymptotische Reihe genügt der Integralgleichung formal.

Wir hatten oben die Lösung der Integralgleichung

$$\varphi(x) = e^{\vartheta(x)} x^\varrho (c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \varepsilon_n x^n), \quad \lim_{x=+0} \varepsilon_n = 0;$$

wir weisen nach, daß auch die Gleichung besteht:

$$\lim_{x=+0} x \frac{d\varepsilon_n}{dx} = 0.$$

Es ist

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi(x))}{dx} = e^{\vartheta(x)} x^\varrho \Big[(\alpha + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k) \Big(\sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda x^\lambda + \varepsilon_n x^n \Big) + x^{k+1} \Big(\sum_{\lambda=0}^{n} (\lambda+1) c_{\lambda+1} x^\lambda + (n+1)\varepsilon_{n+1} x^n + x^{n+1} \frac{d\varepsilon_{n+1}}{dx} \Big) \Big]^*),$$

$$H_1(x)\varphi(x) = e^{\vartheta(x)} x^\varrho \ (\alpha + \alpha_1 x + \cdots) \Big(\sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda x^\lambda + \varepsilon_n x^n \Big),$$

$$\int_0^x H_2(x,y)\varphi(y)\,dy = \sum_{\lambda=0}^{n} (c_\lambda \mathfrak{h}_0(x) + c_{\lambda-1}\mathfrak{h}_1(x) + \cdots + c_0 \mathfrak{h}_\lambda(x)) \int_0^x e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+\lambda}\,dy + \int_0^x \eta_n(x,y)\, e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+n}\,dy,$$

wo für $y \leqq x$

$$|\eta_n(x,y)| \leqq \eta(x), \quad \lim_{x=+0} \eta(x) = 0$$

ist. Der durch $e^{\vartheta(x)} x^{\varrho+k+1}$ dividierte Ausdruck $D(\varphi(x))$ ist jetzt gleich

$$-(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} x + \cdots) \Big(\sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda x^\lambda + \varepsilon_n x^n \Big) + \sum_{\lambda=0}^{n} (\lambda+1) c_{\lambda+1} x^\lambda + (n+1)\,\varepsilon_{n+1} x^n + x^{n+1} \frac{d\varepsilon_{n+1}}{dx} + \sum_{\lambda=0}^{n} x^\lambda (c_\lambda \mathfrak{h}_0(x) + \cdots)(\gamma_{\lambda 0} + \gamma_{\lambda 1} x + \cdots) + e^{-\vartheta(x)} x^{-\varrho-k-1} \int_0^x \eta_n(x,y)\, e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+n}\,dy = \sum_{\lambda=0}^{n} E_\lambda x^\lambda + \mathsf{E}_n x^n = 0.$$

Sind $c_1, \ldots, c_{n+1}$ aus den Gleichungen $E_0 = 0, \ldots, E_{n-1} = 0$ berechnet, so besteht die Gleichung $\mathsf{E}_n = 0$; dabei ist

$$\mathsf{E}_n = -(\alpha_{k+1} + \cdots)\,\varepsilon_n + (n+1)\varepsilon_{n+1} + x \frac{d\varepsilon_{n+1}}{dx} + \delta_n + e^{-\vartheta(x)} x^{-\varrho-n-k-1} \int_0^x \eta_n(x,y)\, e^{\vartheta(y)} y^{\varrho+n}\,dy;$$

---

*) Da n beliebig ist, so ist $\varepsilon_n = x(c_{n+1} + \varepsilon_{n+1})$.

es ist $\lim\limits_{x=+0} \delta_n = 0$, und der absolute Betrag des letzten Gliedes ist höchstens gleich

$$\eta(x) \cdot e^{-\bar{\vartheta}(x)} x^{-\bar{\varrho}-n-k-1} \int_0^x e^{\bar{\vartheta}(y)} y^{\bar{\varrho}+n} dy \leqq \gamma\, \eta(x)$$

nach Hilfssatz 1, so daß dieses Glied für $\lim x = +0$ den Grenzwert 0 hat. Aus $\mathsf{E}_n = 0$ folgt demnach, wenn man x zur Grenze 0 gehen läßt,

$$\lim_{x=+0} x \frac{d\varepsilon_{n+1}}{dx} = 0.$$

Das Hauptergebnis ist in dem Satz enthalten:

Die homogene Integralgleichung

$$\int_0^x H(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0,$$

worin

$$H(x, y) = y^{k+1} + (\alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \cdots) \frac{y-x}{1!} + \cdots \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

und der reelle Teil von α positiv ist, hat eine (bis auf einen konstanten Faktor bestimmte) Lösung in Form einer für hinreichend kleine positive Werte von x konvergenten Reihe

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots;$$

dabei ist, wenn die Bezeichnung

$$\vartheta(x) = -\frac{\alpha}{k x^k} - \frac{\alpha_1}{(k-1) x^{k-1}} - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{x},\ \varrho = \alpha_k - k - 1,\ \mathfrak{p}(x) = e^{a_{k+1} x + \frac{1}{2} a_{k+2} x^2 + \cdots}$$

benutzt wird,

$$\varphi_0(x) = e^{\vartheta(x)} x^{\varrho}\, \mathfrak{p}(x),$$

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -e^{\vartheta(x)} x^{\varrho}\, \mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{e^{-\vartheta(y)} y^{-\varrho-k-1}\, \Phi_\nu(y)}{\mathfrak{p}(y)} dy,\ \Phi_\nu(x) = \int_0^x H_2(x, y)\, \varphi_\nu(y)\, dy. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Funktion $\varphi(x)$ gestattet für kleine positive x eine asymptotische Darstellung durch eine Reihe

$$e^{\vartheta(x)} x^{\varrho} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots),$$

welche der durch zweimalige Differentiation der Integralgleichung erhaltenen Gleichung

$$\frac{d(x^{k+1} \varphi(x))}{dx} - (\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots) \varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2} \varphi(y)\, dy = 0$$

formal genügt.

Wir nehmen jetzt $\bar{\alpha} < 0$ an. Wir zeigen, daß eine differenzierbare

Lösung $\varphi(x)$ der homogenen Integralgleichung $\int_0^x H(x,y)\,\varphi(y)\,dy=0$, welche für $0\leqq x\leqq x_0$ $(x_0>0)$ die Bedingung

$$|\varphi(x)|\leqq Lx^{\delta-1} \quad (\delta>0)$$

erfüllt, nicht möglich ist.

Aus der Gleichung

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi(x))}{dx}-H_1(x)\,\varphi(x)+\Phi(x)=0,\ \Phi(x)=\int_0^x H_2(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

ergibt sich

$$\varphi(x)=ce^{\vartheta(x)}x^{\varrho}\,\mathfrak{p}(x)-e^{\vartheta(x)}x^{\varrho}\,\mathfrak{p}(x)\int_0^x\frac{e^{-\vartheta(y)}y^{-\varrho-k-1}\Phi(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy$$

mit der willkürlichen Konstanten c.

Im Falle $c=0$ ist

$$\varphi(x)=-e^{\vartheta(x)}x^{\varrho}\,\mathfrak{p}(x)\int_0^x\frac{e^{-\vartheta(y)}y^{-\varrho-k-1}\Phi(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy;$$

unter der obigen Annahme ist

$$|\Phi(x)|\leqq\frac{LMx^{\delta}}{\delta},\ |\varphi(x)|\leqq\frac{LMpq\gamma x^{\delta}}{\delta}$$

wegen (Hilfssatz 1)

$$e^{\bar{\vartheta}(x)}x^{\bar{\varrho}}\int_0^x e^{-\bar{\vartheta}(y)}y^{-\bar{\varrho}-k-1}\,dy\leqq\gamma.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt sich für $\nu=0,1,2,\ldots$

$$|\varphi(x)|\leqq\frac{L(Mpq\gamma)^{\nu+1}x^{\delta+\nu}}{\delta(\delta+1)\cdots(\delta+\nu)},$$

was nur möglich ist, wenn $\varphi(x)$ identisch verschwindet.

Ist $c\neq 0$, so hat man

$$|\varphi(x)|\geqq\frac{|c|}{q}e^{\bar{\vartheta}(x)}x^{\bar{\varrho}}-\frac{LMpq\gamma x^{\delta}}{\delta}\geqq\frac{|c|Q}{q}e^{\bar{\vartheta}(x)}x^{\bar{\varrho}} \quad (Q>0)$$

was der Annahme $|\varphi(x)|\leqq Lx^{\delta-1}$ widerspricht.

§ 6.

Die nicht homogene Integralgleichung

$$\int_0^x H(x,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x),$$

$H(x,y)=y^{k+1}+H_1(y)\frac{y-x}{1!}+\cdots$, $H_1(y)=\alpha+\alpha_1y+\alpha_2y^2+\cdots$, $(k=1,2,\ldots)$

führen wir wie oben auf die Gleichung

$$D(\varphi(x))=\frac{d(x^{k+1}\varphi(x))}{dx}-H_1(x)\,\varphi(x)+\int_0^x H_2(x,y)\,\varphi(y)\,dy=f''(x)$$

zurück. Es sei zunächst $\bar{\alpha} < 0$.

Wir lösen nacheinander die linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi_0(x))}{dx} - H_1(x)\,\varphi_0(x) = f''(x),$$

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi_{\nu+1}(x))}{dx} - H_1(x)\,\varphi_{\nu+1}(x) = -\Phi_\nu(x),\quad \Phi_\nu(x) = \int_0^x H_2(x,y)\,\varphi_\nu(y)\,dy \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

in der Form

$$\varphi_0(x) = e^{\vartheta(x)} x^\varrho\, \mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{e^{-\vartheta(y)} y^{-\varrho-k-1} f''(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy,$$

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -e^{\vartheta(x)} x^\varrho\, \mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{e^{-\vartheta(y)} y^{-\varrho-k-1} \Phi_\nu(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy,$$

wo die in § 5 eingeführte Bezeichnung benutzt ist.

Wir setzen voraus, daß für $x \leqq x_0$

$$|f''(x)| \leqq N$$

ist; ferner sei für $x \leqq x_0,\ y \leqq x_0$

$$|\mathfrak{p}(x)| \leqq p,\ \frac{1}{|\mathfrak{p}(x)|} \leqq q,\ |H_2(x,y)| \leqq M,\ \int_0^x e^{-\bar{\vartheta}(y)} y^{-\bar{\varrho}-k-1}\,dy \leqq \gamma\, e^{-\bar{\vartheta}(x)} x^{-\bar{\varrho}}.$$

Dann ist

$$|\varphi_0(x)| \leqq Npq\, e^{\bar{\vartheta}(x)} x^{\bar{\varrho}} \int_0^x e^{-\bar{\vartheta}(y)} y^{-\bar{\varrho}-k-1}\,dy \leqq Npq\gamma.$$

Wir zeigen, daß

$$|\varphi_\nu(x)| \leqq C_\nu x^\nu,\quad C_\nu = \frac{Npq\gamma(Mpq\gamma)^\nu}{\nu!} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Aus dieser Ungleichung folgt nämlich

$$|\Phi_\nu(x)| \leqq C_\nu M \int_0^x y^\nu\,dy = \frac{C_\nu M x^{\nu+1}}{\nu+1},$$

$$|\varphi_{\nu+1}(x)| \leqq \frac{C_\nu Mpq}{\nu+1}\, e^{\bar{\vartheta}(x)} x^{\bar{\varrho}} \int_0^x e^{-\bar{\vartheta}(y)} y^{-\bar{\varrho}+\nu-k}\,dy$$

$$\leqq \frac{C_\nu Mpq x^{\nu+1}}{\nu+1} \cdot e^{\bar{\vartheta}(x)} x^{\bar{\varrho}} \int_0^x e^{-\bar{\vartheta}(y)} y^{-\bar{\varrho}-k-1}\,dy \leqq \frac{C_\nu Mpq\gamma\, x^{\nu+1}}{\nu+1}.$$

Die Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x)$$

ist für $0 \leqq x \leqq x_0$ absolut und gleichmäßig konvergent.

Wie in § 2 erkennt man, daß die Funktion $\varphi(x)$ der Gleichung $D(\varphi(x)) = 0$ genügt. Durch zweimalige Integration erhält man hieraus

$$x^{k+1}\varphi(x) + \int_0^x H_1(x,y)\,\varphi(y)\,dy = f'(x) + C,$$

Lösung $\varphi(x)$ der homogenen Integralgleichung $\int_0^x H(x,y)\,\varphi(y)\,dy=0$, welche für $0\leqq x\leqq x_0$ $(x_0>0)$ die Bedingung

$$|\varphi(x)|\leqq Lx^{\delta-1} \quad (\delta>0)$$

erfüllt, nicht möglich ist.

Aus der Gleichung

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi(x))}{dx}-H_1(x)\,\varphi(x)+\Phi(x)=0,\ \Phi(x)=\int_0^x H_2(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

ergibt sich

$$\varphi(x)=ce^{\vartheta(x)}x^{\varrho}\,\mathfrak{p}(x)-e^{\vartheta(x)}x^{\varrho}\,\mathfrak{p}(x)\int_0^x\frac{e^{-\vartheta(y)}y^{-\varrho-k-1}\Phi(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy$$

mit der willkürlichen Konstanten c.

Im Falle $c=0$ ist

$$\varphi(x)=-e^{\vartheta(x)}x^{\varrho}\,\mathfrak{p}(x)\int_0^x\frac{e^{-\vartheta(y)}y^{-\varrho-k-1}\Phi(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy;$$

unter der obigen Annahme ist

$$|\Phi(x)|\leqq\frac{LMx^{\delta}}{\delta},\ |\varphi(x)|\leqq\frac{LMpq\gamma x^{\delta}}{\delta}$$

wegen (Hilfssatz 1)

$$e^{\bar\vartheta(x)}x^{\bar\varrho}\int_0^x e^{-\bar\vartheta(y)}y^{-\bar\varrho-k-1}\,dy\leqq\gamma.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt sich für $\nu=0,1,2,\ldots$

$$|\varphi(x)|\leqq\frac{L(Mpq\gamma)^{\nu+1}x^{\delta+\nu}}{\delta(\delta+1)\cdots(\delta+\nu)},$$

was nur möglich ist, wenn $\varphi(x)$ identisch verschwindet.

Ist $c\neq0$, so hat man

$$|\varphi(x)|\geqq\frac{|c|}{q}e^{\bar\vartheta(x)}x^{\bar\varrho}-\frac{LMpq\gamma x^{\delta}}{\delta}\geqq\frac{|c|Q}{q}e^{\bar\vartheta(x)}x^{\bar\varrho}\quad(Q>0)$$

was der Annahme $|\varphi(x)|\leqq Lx^{\delta-1}$ widerspricht.

§ 6.

Die nicht homogene Integralgleichung

$$\int_0^x H(x,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x),$$

$$H(x,y)=y^{k+1}+H_1(y)\frac{y-x}{1!}+\cdots,\quad H_1(y)=\alpha+\alpha_1y+\alpha_2y^2+\cdots,\qquad(k=1,2,\ldots)$$

führen wir wie oben auf die Gleichung

$$D(\varphi(x))=\frac{d(x^{k+1}\varphi(x))}{dx}-H_1(x)\,\varphi(x)+\int_0^x H_2(x,y)\,\varphi(y)\,dy=f''(x)$$

zurück. Es sei zunächst $\bar{\alpha} < 0$.

Wir lösen nacheinander die linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi_0(x))}{dx} - H_1(x)\,\varphi_0(x) = f''(x),$$

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi_{\nu+1}(x))}{dx} - H_1(x)\,\varphi_{\nu+1}(x) = -\Phi_\nu(x),\quad \Phi_\nu(x) = \int_0^x H_2(x,y)\,\varphi_\nu(y)\,dy \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

in der Form

$$\varphi_0(x) = e^{\vartheta(x)} x^{\varrho}\,\mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{e^{-\vartheta(y)} y^{-\varrho-k-1} f''(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy,$$

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -e^{\vartheta(x)} x^{\varrho}\,\mathfrak{p}(x) \int_0^x \frac{e^{-\vartheta(y)} y^{-\varrho-k-1} \Phi_\nu(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy,$$

wo die in § 5 eingeführte Bezeichnung benutzt ist.

Wir setzen voraus, daß für $x \leqq x_0$

$$|f''(x)| \leqq N$$

ist; ferner sei für $x \leqq x_0,\ y \leqq x_0$

$$|\mathfrak{p}(x)| \leqq p,\ \frac{1}{|\mathfrak{p}(x)|} \leqq q,\ |H_2(x,y)| \leqq M,\ \int_0^x e^{-\bar{\vartheta}(y)} y^{-\bar{\varrho}-k-1}\,dy \leqq \gamma\, e^{-\bar{\vartheta}(x)} x^{-\bar{\varrho}}.$$

Dann ist

$$|\varphi_0(x)| \leqq Npq\, e^{\bar{\vartheta}(x)} x^{\bar{\varrho}} \int_0^x e^{-\bar{\vartheta}(y)} y^{-\bar{\varrho}-k-1}\,dy \leqq Npq\gamma.$$

Wir zeigen, daß

$$|\varphi_\nu(x)| \leqq C_\nu x^\nu,\quad C_\nu = \frac{Npq\gamma(Mpq\gamma)^\nu}{\nu!} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Aus dieser Ungleichung folgt nämlich

$$|\Phi_\nu(x)| \leqq C_\nu M \int_0^x y^\nu\,dy = \frac{C_\nu M x^{\nu+1}}{\nu+1},$$

$$|\varphi_{\nu+1}(x)| \leqq \frac{C_\nu Mpq}{\nu+1}\, e^{\bar{\vartheta}(x)} x^{\bar{\varrho}} \int_0^x e^{-\bar{\vartheta}(y)} y^{-\bar{\varrho}+\nu-k}\,dy$$

$$\leqq \frac{C_\nu Mpq x^{\nu+1}}{\nu+1} \cdot e^{\bar{\vartheta}(x)} x^{\bar{\varrho}} \int_0^x e^{-\bar{\vartheta}(y)} y^{-\bar{\varrho}-k-1}\,dy \leqq \frac{C_\nu Mpq\gamma\, x^{\nu+1}}{\nu+1}.$$

Die Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x)$$

ist für $0 \leqq x \leqq x_0$ absolut und gleichmäßig konvergent.

Wie in § 2 erkennt man, daß die Funktion $\varphi(x)$ der Gleichung $D(\varphi(x)) = 0$ genügt. Durch zweimalige Integration erhält man hieraus

$$x^{k+1}\varphi(x) + \int_0^x H_1(x,y)\,\varphi(y)\,dy = f'(x) + C,$$

$$\int_0^x H(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x) + Cx + C'.$$

Für $\lim x = +0$ hat man

$$C = -f'(0), \quad C' = -f(0),$$

so daß die Funktion $\varphi(x)$ der Integralgleichung

$$\int_0^x H(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x) - xf'(0) - f(0)$$

genügt. Soll die ursprüngliche Integralgleichung

$$\int_0^x H(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

erfüllt sein, so muß $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ sein.

Wir setzen jetzt $f(x)$ als Potenzreihe von x voraus, welche keine geringere als die zweite Potenz von x enthält; es sei

$$f''(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots.$$

Dann ergeben sich asymptotische Potenzreihen für die Funktionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots$. Nach Hilfssatz 5 besteht die asymptotische Gleichung

$$\varphi_0(x) \backsim c_{00} + c_{01} x + c_{02} x^2 + \cdots,$$

wo die Reihe auf der rechten Seite der Differentialgleichung für $\varphi_0(x)$ formal genügt. Allgemein ist

$$\varphi_\nu(x) \backsim c_{\nu\nu} x^\nu + c_{\nu,\nu+1} x^{\nu+1} + \cdots.$$

Denn daraus folgt

$$\Phi_\nu(x) \backsim \int_0^x H_2(x, y)\ (c_{\nu\nu} y^\nu + c_{\nu,\nu+1} y^{\nu+1} + \cdots)\,dy$$

oder

$$\Phi_\nu(x) \backsim C_{\nu,\nu+1} x^{\nu+1} + C_{\nu,\nu+2} x^{\nu+2} + \cdots;$$

nach Hilfssatz 5 ist

$$\varphi_{\nu+1}(x) \backsim c_{\nu+1,\nu+1} x^{\nu+1} + c_{\nu+1,\nu+2} x^{\nu+2} + \cdots,$$

wo die Reihe rechts der Differentialgleichung für $\varphi_{\nu+1}(x)$ formal genügt. Setzt man $c_\nu = c_{0\nu} + c_{1\nu} + \cdots + c_{\nu\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, so gilt die asymptotische Gleichung

$$\varphi(x) \backsim c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots.$$

Wir zeigen, daß die Reihe $\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ der Gleichung $D(\varphi(x)) = 0$ formal genügt. Da die Reihen, welche die Funktionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_{\nu+1}(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ asymptotisch darstellen, den betreffenden linearen Differentialgleichungen formal genügen, so ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+k+1)\,c_{0\lambda}\,x^{\lambda+k}-(\alpha+\alpha_1 x+\cdots)\sum_{\lambda=0}^{\infty}c_{0\lambda}\,x^{\lambda}-\sum_{\lambda=0}^{\infty}b_\lambda x^\lambda=\sum_{\lambda=0}^{\infty}E_{0\lambda}\,x^\lambda=0,$$

$$\sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty}(\lambda+k+1)\,c_{\nu+1,\lambda}\,x^{\lambda+k}-(\alpha+\alpha_1 x+\cdots)\sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty}c_{\nu+1,\lambda}\,x^{\lambda}$$
$$+\sum_{\lambda=\nu}^{\infty}(c_{\nu\lambda}\mathfrak{h}_0(x)+c_{\nu,\lambda-1}\mathfrak{h}_1(x)+\cdots+c_{\nu\nu}\mathfrak{h}_{\lambda-\nu}(x))\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}=\sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty}E_{\nu+1,\lambda}\,x^\lambda=0.$$
$(\nu=0,1,2,\ldots)$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man die formale Gleichung

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+k+1)\,c_\lambda\,x^{\lambda+k}-(\alpha+\alpha_1 x+\cdots)\sum_{\lambda=0}^{\infty}c_\lambda\,x^\lambda$$
$$+\sum_{\lambda=0}^{\infty}(c_\lambda\mathfrak{h}_0(x)+c_{\lambda-1}\mathfrak{h}_1(x)+\cdots+c_0\mathfrak{h}_\lambda(x))\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}-\sum_{\lambda=0}^{\infty}b_\lambda x^\lambda=\sum_{\lambda=0}^{\infty}E_\lambda\,x^\lambda=0;$$

d. h. die Gleichung $D(\varphi(x))=0$ wird durch die Reihe $\varphi(x)=c_0+c_1 x+c_2 x^2+\cdots$ formal befriedigt. Aus der Gleichung

$$E_\lambda=-\alpha c_\lambda+\cdots-b_\lambda=0$$

berechnet man c_λ.

§ 7.

Die am Anfang von § 6 angeschriebene nicht homogene Integralgleichung behandeln wir jetzt unter der Voraussetzung $\bar{\alpha}>0$.

Die Differentialgleichungen für $\varphi_0(x)$, $\varphi_{\nu+1}(x)$ lösen wir in der Form

$$\varphi_0(x)=e^{\vartheta(x)}x^\varrho\,\mathfrak{p}(x)\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-\vartheta(y)}y^{-\varrho-k-1}f''(y)}{\mathfrak{p}(y)}dy,$$

$$\varphi_{\nu+1}(x)=-e^{\vartheta(x)}x^\varrho\,\mathfrak{p}(x)\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-\vartheta(y)}y^{-\varrho-k-1}\Phi_\nu(y)}{\mathfrak{p}(y)}dy;$$

dabei ist x_0 eine hinreichend kleine positive Größe, und x wird auf das Intervall $0\leqq x\leqq x_0$ beschränkt. Der Koeffizient von $\frac{1}{y^k}$ in $-\vartheta(y)$ hat jetzt einen positiven reellen Teil. Wenn für $x\leqq x_0$

$$|f''(x)|\leqq N$$

und (Hilfssatz 3)

$$\int_{x}^{x_0}e^{-\bar{\vartheta}(y)}y^{-\bar{\varrho}-k-1}dy\leqq\gamma\,e^{-\bar{\vartheta}(x)}x^{-\bar{\varrho}}$$

ist, hat man

$$|\varphi_0(x)|\leqq Npq\,e^{\bar{\vartheta}(x)}x^{\bar{\varrho}}\int_{x}^{x_0}e^{-\bar{\vartheta}(y)}y^{-\bar{\varrho}-k-1}dy\leqq Npq\gamma.$$

Allgemein ist

$$|\varphi_\nu(x)|\leqq C_\nu x_0^\nu,\quad C_\nu=Npq\gamma(Mpq\gamma)^\nu;$$

denn daraus folgt

$$|\Phi_\nu(x)| \leqq C_\nu M x_0^\nu \int_0^x dy = C_\nu M x_0^\nu x \leqq C_\nu M x_0^{\nu+1},$$

$$|\varphi_{\nu+1}(x)| \leqq C_\nu M p q x_0^{\nu+1} e^{\bar{\vartheta}(x)} x^{\bar{\varrho}} \int_x^{x_0} e^{-\bar{\vartheta}(y)} y^{-\bar{\varrho}-k-1} dy \leqq C_\nu M p q \gamma x_0^{\nu+1}.$$

Wenn x_0 so klein angenommen wird, daß $Mpq\gamma x_0 < \varkappa < 1$ ist, ist die Reihe

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots$$

für $0 \leqq x \leqq x_0$ absolut und gleichmäßig konvergent. Die Funktion $\varphi(x)$ genügt der Gleichung $D(\varphi(x)) = 0$ und, wenn $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ ist, auch der ursprünglichen Integralgleichung.

Es sei jetzt für $f''(x)$ die konvergente oder asymptotische Potenzreihe $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$ gegeben, so daß $\lim_{x=+0} f''(x) = b_0$ ist. Jede Lösung $\varphi_0(x)$ der nicht homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi_0(x))}{dx} - H_1(x)\varphi_0(x) = f''(x)$$

hat nach Hilfssatz 5 für $\lim x = +0$ den Grenzwert

$$-\lim_{x=+0} \frac{f''(x)}{H_1(x)} = -\frac{b_0}{\alpha}.$$

Aus der Differentialgleichung

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi_{\nu+1}(x))}{dx} - H_1(x)\varphi_{\nu+1}(x) = -\int_0^x H_2(x, y)\varphi_\nu(y)\,dy$$

folgt

$$\lim_{x=+0} \varphi_{\nu+1}(x) = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

wenn man die Annahme macht, daß $\lim_{x=+0} \varphi_\nu(x)$ endlich und daher

$$\lim_{x=+0} \int_0^x H_2(x, y)\,\varphi_\nu(y)\,dy = 0$$

ist. Diese Annahme trifft aber für $\nu = 0$ zu. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots$ ist

$$\lim_{x=+0} \varphi(x) = \gamma_0 = -\frac{b_0}{\alpha}.$$

Indem man die Gleichung

$$D(\varphi(x)) = x^{k+1}\frac{d\varphi(x)}{dx} + ((k+1)x^k - H_1(x))\varphi(x) + \int_0^x H_2(x, y)\,\varphi(y)\,dy - f''(x) = 0$$

n-mal nach x differenziert und

$$\frac{d^{n+1}\varphi(x)}{dx^{n+1}} = \varphi^{(n+1)}(x) = \frac{d\varphi^{(n)}(x)}{dx}$$

setzt, erhält man eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^n D(\varphi(x))}{dx^n} = x^{k+1} \frac{d\varphi^{(n)}(x)}{dx} + P_n(x)\varphi^{(n)}(x) + Q_n(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots \varphi^{(n-1)}(x)) + \int_0^x H_{n+2}(x, y)\varphi(y)dy = 0^*),$$

wo P_n eine Funktion von x und Q_n eine lineare, nicht homogene Funktion von $\varphi(x), \varphi'(x), \dots \varphi^{(n-1)}(x)$ mit von x abhängigen Koeffizienten ist. Zur Berechnung von P_n, Q_n aus

$$P_0 = (k+1)x^k - H_1(x), \quad Q_0 = -f''(x)$$

dienen die Rekursionsformeln

$$P_{n+1} = P_n + (k+1)x^k,$$

$$Q_{n+1} = \frac{\partial Q_n}{\partial x} + (-1)^n H_{n+2}(x)\varphi(x) + \frac{\partial Q_n}{\partial \varphi(x)}\varphi'(x) + \dots + \frac{\partial Q_n}{\partial \varphi^{(n-2)}(x)}\varphi^{(n-1)}(x) + \left(\frac{\partial Q_n}{\partial \varphi^{(n-1)}(x)} + \frac{dP_n}{dx}\right)\varphi^{(n)}(x).$$

Demnach ist

$$P_n(x) = (n+1)(k+1)x^k - H_1(x), \quad P_n(0) = -H_1(0) = -\alpha.$$

Sind $\varphi(x), \varphi'(x), \dots \varphi^{(n-1)}(x)$ als stetige Funktionen mit den Grenzwerten

$$\lim_{x=+0} \varphi(x) = \gamma_0, \quad \lim_{x=+0} \varphi'(x) = 1!\,\gamma_1, \quad \dots \quad \lim_{x=+0} \varphi^{(n-1)}(x) = (n-1)!\,\gamma_{n-1}$$

gefunden, so folgt aus der linearen Differentialgleichung erster Ordnung für $\varphi^{(n)}(x)$, daß

$$\lim_{x=+0} \varphi^{(n)}(x) = n!\,\gamma_n = \frac{1}{\alpha} Q_n(0, \gamma_0, 1!\gamma_1, \dots (n-1)!\gamma_{n-1})$$

ist.

Die Gleichung $D(\varphi(x)) = 0$ wird formal durch eine Potenzreihe

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

befriedigt, die wie am Schluß von § 6 berechnet wird. Wir hatten damals

$$D(\varphi(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n x^n;$$

da E_n nach den für konvergente Reihen gültigen Regeln berechnet wurde, so können wir schreiben:

$$n!\,E_n = \left[\frac{d^n D(\varphi(x))}{dx^n}\right]_{x=0}.$$

Wenn man in dem obigen Ausdruck für die n-te Ableitung von $D(\varphi(x))$

$$x = 0, \quad \varphi^{(\nu)}(x) = \nu!\,c_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

---

*) Es ist

$$H_{n+2}(x, y) = \frac{\partial^{n+2} H(x, y)}{\partial x^{n+2}} = \frac{\partial^n H_2(x, y)}{\partial x^n}, \quad H_{n+2}(x, x) = (-1)^n H_{n+2}(x).$$

setzt, erhält man

$$n!\,E_n = -\,n!\,\alpha c_n + Q_n\ (0, c_0, 1!\,c_1, \ldots (n-1)!\,c_{n-1}).$$

Die Rekursionsformel $n!\,E_n = 0$ oder

$$n!\,c_n = \frac{1}{\alpha}\,Q_n\ (0, c_0, 1!\,c_1, \ldots (n-1)!\,c_{n-1})$$

stimmt mit der Rekursionsformel für γ_n überein, so daß $\gamma_n = c_n$ ist.

Die oben dargestellte Lösung $\varphi(x)$ der Integralgleichung erfüllt demnach die Gleichung

$$\lim_{x=+0} \varphi^{(n)}(x) = n!\ c_n. \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

Daraus folgt die asymptotische Gleichung

$$\varphi(x) \backsim c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots.$$

Denn setzt man

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_n x^n + \varepsilon_n x^n,$$

wo n eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ bedeutet, so ist

$$\varepsilon_n = \frac{\varphi(x) - \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu x^\nu}{x^n};$$

daraus folgt

$$\lim_{x=+0} \varepsilon_n = \lim_{x=+0} \frac{\varphi^{(n)}(x) - n!\,c_n}{n!} = 0\ ^*).$$

Das Hauptergebnis von § 6 und § 7 fassen wir in den Satz zusammen:

Die nicht homogene Integralgleichung

$$\int_0^x H(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x),$$

worin

$$H(x, y) = y^{k+1} + (\alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \cdots)\frac{y-x}{1!} + \cdots \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

und $f(x)$ in der Nähe von $x = 0$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist, hat, wenn der reelle Teil von α von Null verschieden und $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ ist, für $0 \leqq x \leqq x_0$ (x_0 positiv, hinreichend klein) eine Lösung in Form einer konvergenten Reihe

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots;$$

dabei ist

$$\varphi_0(x) = e^{\vartheta(x)} x^\varrho \mathfrak{p}(x) \int_\xi^x \frac{e^{-\vartheta(y)} y^{-\varrho-k-1} f''(y)}{\mathfrak{p}(y)}\,dy,$$

---

*) Vgl. Bd. 119 dieses Journals, S. 272 ff.

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -e^{\vartheta(x)} x^{\varrho} \mathfrak{p}(x) \int_{\xi}^{x} \frac{e^{-\vartheta(y)} y^{-\varrho-k-1} \Phi_\nu(y)}{\mathfrak{p}(y)} dy, \quad \Phi_\nu(x) = \int_0^x H_2(x,y)\, \varphi_\nu(y)\, dy, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

wo ξ gleich 0 oder gleich x_0 zu nehmen ist, je nachdem der reelle Teil von α negativ oder positiv ist. Für kleine positive x wird $\varphi(x)$ asymptotisch dargestellt durch eine Potenzreihe

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

welche der durch zweimalige Differentiation der Integralgleichung erhaltenen Gleichung

$$\frac{d(x^{k+1}\varphi(x))}{dx} - (\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x^2} \varphi(y)\, dy = f''(x)$$

formal genügt.

§ 8.

Wenn es sich um die Untersuchung der Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Nähe einer singulären Stelle der Unbestimmtheit handelt, wird diese Stelle häufig ins Unendliche verlegt. Unsere Integralgleichung wird durch die Substitution $x = \frac{1}{x'}$, $y = \frac{1}{y'}$ in

$$-\int_{\infty}^{x'} H\left(\frac{1}{x'}, \frac{1}{y'}\right) \varphi\left(\frac{1}{y'}\right) \frac{dy}{y'^2} = f\left(\frac{1}{x'}\right)$$

übergeführt. Indem wir die Bezeichnung ändern, insbesondere $\varphi(y)$ an Stelle von $\frac{1}{y'^2}\varphi\left(\frac{1}{y'}\right)$ setzen, haben wir die Integralgleichung

$$-\int_{\infty}^{x} H(x,y)\, \varphi(y)\, dy = f(x).$$

Wir setzen $H(x,y)$ als Potenzreihe von $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ohne konstantes Glied voraus; in

$$H(x,y) = \sum_{\lambda\mu} \frac{a_{\lambda\mu}}{x^\lambda y^\mu} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

sei $a_{00} = 0$, aber a_{10} und a_{01} nicht beide gleich Null. Setzt man

$$H(x,y) = H_0(y) + \frac{1}{1!} H_1(y) \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \cdots,$$

so ist

$$H_0(y) = \frac{a_1}{y} + \frac{a_2}{y^2} + \cdots, \quad a_1 = a_{10} + a_{01};$$

wenn $a_1 = \cdots = a_k = 0$, $a_{k+1} \neq 0$ ist, kann man

$$H_0(y) = \frac{1}{y^{k+1}} \quad (k \geqq 0)$$

annehmen. Indem man die Integralgleichung

$$-\int_{\infty}^{x}\left[\frac{1}{y^{k+1}}+H_1(y)\cdot\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2!}H_2(y)\cdot\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)^2+\cdots\right]\varphi(y)\,dy=f(x)$$

zweimal nach x differenziert und die Bezeichnung

$$H_1(x,y)=x^2\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}=H_1(y)+\frac{1}{1!}H_2(y)\cdot\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\cdots,$$

$$H_2(x,y)=x^2\frac{\partial H_1(x,y)}{\partial x}=H_2(y)+\frac{1}{1!}H_3(y)\cdot\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\cdots$$

benutzt, erhält man die Gleichungen

$$\frac{\varphi(x)}{x^{k-1}}+\int_{\infty}^{x}H_1(x,y)\,\varphi(y)\,dy=-x^2f'(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi(x)}{x^{k-1}}\right)+H_1(x)\,\varphi(x)+\frac{1}{x^2}\int_{\infty}^{x}H_2(x,y)\,\varphi(y)\,dy=-\frac{d}{dx}(x^2f'(x)).$$

Es sei

$$H_1(x)=\alpha+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha^2}{x^2}+\cdots.$$

Die homogene Integralgleichung

$$\int_{\infty}^{x}H(x,y)\,\varphi(y)\,dy=0$$

wird im Falle $k=0$ wie in § 2, im Falle $k>0$, $\bar{\alpha}>0$ wie in § 5 behandelt.

Die nicht homogene Integralgleichung

$$-\int_{\infty}^{x}H(x,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x)$$

wird im Falle $k=0$ wie in § 3, im Falle $k>0$, $\bar{\alpha}<0$ wie in § 6, im Falle $k>0$, $\bar{\alpha}>0$ wie in § 7 gelöst. Dabei ist vorausgesetzt, daß für hinreichend große positive Werte von x

$$\left|\frac{d}{dx}(x^2f'(x))\right|\leqq\frac{N}{x^2}$$

und $\lim\limits_{x=\infty}x^2f'(x)=0$, $\lim\limits_{x=\infty}f(x)=0$ ist; das Vorhandensein einer Potenzreihenentwicklung

$$f(x)=\frac{b_0}{x^2}+\frac{b_1}{x^3}+\cdots$$

ist eine hinreichende Bedingung.

*Volterra*sche Integralgleichungen und Summengleichungen.

Zweiter Teil: Über die Lösungen gewisser Summengleichungen und ihr asymptotisches Verhalten*).

Von Herrn *J. Horn* in Darmstadt.

---

§ 9.

In der Summengleichung

$$-\sum_{x}^{\infty} H(x,y)\,\varphi(y) = f(x)$$

seien $H(x,y)$ und $f(x)$ gegebene Funktionen, $\varphi(y)$ eine zu bestimmende Funktion; x sei eine reelle positive Zahl oberhalb einer gewissen Größe x_0, und y durchlaufe bei der Summation die Werte $x, x+1, x+2, \ldots$.

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen

$$-H(x,x)\varphi(x) - \sum_{x+1}^{\infty} H(x,y)\varphi(y) = f(x),$$

$$-\sum_{x+1}^{\infty} H(x+1,y)\varphi(y) = f(x+1)$$

erhält man, wenn

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),\ \Delta H(x,y) = H(x+1,y) - H(x,y)$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$H(x,x)\varphi(x) - \sum_{x+1}^{\infty} \Delta H(x,y)\varphi(y) = \Delta f(x).$$

Indem man die Gleichungen

$$H(x,x)\varphi(x) - \Delta H(x,x+1)\varphi(x+1) - \sum_{x+2}^{\infty} \Delta H(x,y)\varphi(y) = \Delta f(x),$$

$$H(x+1,x+1)\varphi(x+1) \qquad -\sum_{x+2}^{\infty} \Delta H(x+1,y)\varphi(y) = \Delta f(x+1)$$

subtrahiert, erhält man

---

*) Die Einleitung zum zweiten Teil befindet sich in Verbindung mit derjenigen zum ersten Teil auf S. 120—123.

$$\Delta(H(x,x)\varphi(x)) + \Delta H(x,x+1)\varphi(x+1) - \sum_{x+2}^{\infty} \Delta^2 H(x,y)\varphi(y) = \Delta^2 f(x).$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens ergibt sich die Gleichung

$$\Delta^m(H(x,x)\varphi(x)) + \Delta^{m-1}(\Delta H(x,x+1)\varphi(x+1)) + \cdots + \Delta^m H(x,x+m)\varphi(x+m) - \sum_{x+m+1}^{\infty} \Delta^{m+1} H(x,y)\varphi(y) = \Delta^{m+1} f(x).$$

Ist $H(x,y)$ eine ganze rationale Funktion m-ten Grades von x, so ist $\Delta^m H(x,y)$ von x unabhängig, während $\Delta^{m+1} H(x,y)$ verschwindet. Eine Lösung $\varphi(x)$ der vorgelegten Summengleichung genügt also in diesem Falle der linearen Differenzengleichung m-ter Ordnung

$$\mathfrak{D}(\varphi(x)) = \Delta^m(H(x,x)\varphi(x)) + \Delta^{m-1}(\Delta H(x,x+1)\varphi(x+1)) + \cdots + \Delta^m H(x,x+m)\varphi(x+m) = \Delta^{m+1} f(x).$$

Setzt man (bei beliebiger Funktion $H(x,y)$)

$$H(x,x) = H_0(x), \quad \Delta^i H(x-i,x) = (-1)^i H_i(x), \qquad (i=1,\dots m)$$

so ist

$$\mathfrak{D}(\varphi(x)) = \Delta^m(H_0(x)\varphi(x)) - \Delta^{m-1}(H_1(x+1)\varphi(x+1)) + \Delta^{m-2}(H_2(x+2)\varphi(x+2)) - \cdots + (-1)^m H_m(x+m)\varphi(x+m).$$

Die Differenzengleichung $\mathfrak{D}(\varphi(x)) = 0$ ist adjungiert zu der Differenzengleichung $\mathfrak{E}(\psi(x)) = 0$, wobei gesetzt ist:

$$\mathfrak{E}(\psi(x)) = H_0(x)\Delta^m\psi(x) + H_1(x)\Delta^{m-1}\psi(x) + \cdots + H_m(x)\psi(x).$$

Unter Anwendung der Bezeichnung

$$(-1)^i P_i(x) = (m)_i H_0(x) - (m-1)_i H_1(x) + (m-2)_i H_2(x) - \cdots + (-1)^{m-i}(i)_i H_{m-i}(x) \qquad (i=0,1,\dots m)$$

können wir schreiben:

$$\mathfrak{D}(\varphi(x)) = P_0(x+m)\varphi(x+m) + P_1(x+m-1)\varphi(x+m-1) + \cdots + P_{m-1}(x+1)\varphi(x+1) + P_m(x)\varphi(x),$$

$$(-1)^m\mathfrak{E}(\psi(x)) = P_m(x)\psi(x+m) + P_{m-1}(x)\psi(x+m-1) + \cdots + P_1(x)\psi(x+1) + P_0(x)\psi(x).$$

Die Gleichung, welche aus der vorgelegten Summengleichung durch $(m+1)$-malige Differenzenbildung erhalten wird, erscheint jetzt in der Form

$$\mathfrak{D}(\varphi(x)) - \sum_{x+m+1}^{\infty} \Delta^{m+1} H(x,y)\varphi(y) = \Delta^{m+1} f(x).$$

Wir machen im folgenden von dieser Gleichung nur für $m=1$ Gebrauch; dann ist

$$H_0(x) = H(x,x), \; H_1(x) = -\Delta H(x-1,x),$$
$$P_0(x) = H_0(x) - H_1(x), \; P_1(x) = -H_0(x),$$

so daß die Gleichung lautet:

$$(H_0(x+1)-H_1(x+1))\varphi(x+1)-H_0(x)\varphi(x)-\sum_{x+2}^{\infty}\Delta^2 H(x,y)\varphi(y)=\Delta^2 f(x).$$

Durch Multiplikation mit x bringen wir unsere Summengleichung unter Benutzung der Bezeichnung

$$\tilde{H}(x,y)=xH(x,y),\ \tilde{f}(x)=xf(x)$$

auf die Form

$$-\sum_{x}^{\infty}\tilde{H}(x,y)\varphi(y)=\tilde{f}(x),$$

aus welcher die Gleichung

$$(\tilde{H}_0(x+1)-\tilde{H}_1(x+1))\varphi(x+1)-\tilde{H}_0(x)\varphi(x)-\sum_{x+2}^{\infty}\Delta^2\tilde{H}(x,y)\varphi(y)=\Delta^2\tilde{f}(x)$$

hervorgeht. Es ist

$$\Delta\tilde{H}(x,y)=x\Delta H(x,y)+H(x+1,y),\ \Delta^2\tilde{H}(x,y)=x\Delta^2 H(x,y)+2\Delta H(x+1,y);$$

$$\tilde{H}_0(x)=xH_0(x),\ \tilde{H}_1(x)=(x-1)H_1(x)-H_0(x).$$

Wenn

$$Q(x)=(x+1)(H_0(x+1)-H_1(x+1))+H_0(x+1)+H_1(x+1)$$

gesetzt wird, schreibt sich die obige Gleichung

$$Q(x)\varphi(x+1)-xH_0(x)\varphi(x)-\sum_{x+2}^{\infty}(x\Delta^2 H(x,y)+2\Delta H(x+1,y))\varphi(y)=\Delta^2(xf(x)).$$

Wir nehmen jetzt an, $H(x,y)$ sei für große Werte von x und y in eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ entwickelbar*):

$$H(x,y)=\sum_{\lambda\mu}\frac{a_{\lambda\mu}}{x^\lambda y^\mu}. \qquad (\lambda,\mu=0,1,2,\ldots)$$

Dann ist

$$H_0(x)=H(x,x)=a_{00}+\frac{a_{10}+a_{01}}{x}+\frac{a_{20}+a_{11}+a_{02}}{x^2}+\cdots,$$

$$\Delta H(x,y)=\frac{1}{x^2}\left(-a_{10}+\frac{a_{10}-2a_{20}}{x}-\frac{a_{11}}{y}+\cdots\right),$$

also, wenn $a_{00}\neq 0$ ist,

$$\frac{\Delta H(x,y)}{H_0(x)}=\frac{1}{x^2}\pi(x,y),$$

wo $\pi(x,y)$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ mit dem Anfangsglied $-\frac{a_{10}}{a_{00}}$ dar-

*) Es genügt die Annahme, daß für große x und $y\geqq x$ die Funktion $H(x,y)$ durch die Reihe $\sum_{\lambda\mu}\frac{a_{\lambda\mu}}{x^\lambda y^\mu}$ asymptotisch dargestellt wird; d. h. wenn n eine beliebige ganze positive Zahl ist, soll

$$H(x,y)=\sum_{\lambda+\mu\leqq n}\frac{a_{\lambda\mu}}{x^\lambda y^\mu}+\frac{\varepsilon_n(x,y)}{x^n}$$

sein, wo $|\varepsilon_n(x,y)|$ beliebig klein wird, wenn man x hinreichend groß und $y\geqq x$ nimmt.

stellt. Wenn wir noch die Bezeichnung

$$\frac{\Delta f(x)}{H_0(x)} = g(x)$$

benutzen, haben wir die Gleichung (S. 159)

$$(\alpha) \qquad \varphi(x) - \frac{1}{x^2} \sum_{x+1}^{\infty} \pi(x, y)\varphi(y) = g(x).$$

Ist $a_{00} = 0$, $a_{10} + a_{01} \neq 0$, so hat man

$$Q(x) = a_{10} + a_{01} + \frac{a_{20} + a_{11} + a_{02} + a_{01}}{x} + \cdots,$$

$$x H_0(x) = a_{10} + a_{01} + \frac{a_{20} + a_{11} + a_{02}}{x} + \cdots,$$

$$x \Delta^2 H(x, y) + 2 \Delta H(x+1, y) = \frac{b}{x^3} + \cdots,$$

$$\frac{x H_0(x)}{Q(x)} = 1 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots, \quad \alpha_1 = -\frac{a_{01}}{a_{10} + a_{01}},$$

$$\frac{x \Delta^2 H(x, y) + 2 \Delta H(x+1, y)}{Q(x)} = \frac{1}{x^3} \omega(x, y),$$

wo $\omega(x, y)$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ darstellt. Demnach gilt, wenn

$$\frac{\Delta^2(x f(x))}{Q(x)} = h(x)$$

gesetzt wird, die Gleichung (S. 161)

$$(\beta) \quad \varphi(x+1) - \left(1 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots\right)\varphi(x) - \frac{1}{x^3} \sum_{x+2}^{\infty} \omega(x, y)\, \varphi(y) = h(x).$$

Wenn $a_{00} = 0$, $a_{10} + a_{01} = 0$, $a_{20} + a_{11} + a_{02} + a_{01} \neq 0$ ist, hat man

$$Q(x) = \frac{a_{20} + a_{11} + a_{02} + a_{01}}{x} + \cdots,$$

$$x H_0(x) = \frac{a_{20} + a_{11} + a_{02}}{x} + \cdots,$$

$$x \Delta^2 H(x, y) + 2 \Delta H(x+1, y) = \frac{b}{x^3} + \cdots,$$

$$\frac{x H_0(x)}{Q(x)} = \alpha + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots, \quad \alpha = \frac{a_{20} + a_{11} + a_{02}}{a_{20} + a_{11} + a_{02} + a_{01}},$$

wo α von Null verschieden sein möge,

$$\frac{x \Delta^2 H(x, y) + 2 \Delta H(x+1, y)}{Q(x)} = \frac{1}{x^2} \omega(x, y),$$

wo $\omega(x, y)$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ist. Wenn $h(x)$ dieselbe Bedeutung hat wie oben, haben wir die Gleichung

$$(\gamma) \quad \varphi(x+1) - \left(\alpha + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots\right)\varphi(x) - \frac{1}{x^2} \sum_{x+2}^{\infty} \omega(x, y)\, \varphi(y) = h(x).$$

§ 10.

In §§ 11—13 werden die folgenden Hilfssätze benutzt*).

Hilfssatz 8. „Wenn der reelle Teil $\bar{\varrho}$ von ϱ kleiner als -1 ist, ist für große Werte von x

$$\sum_x^\infty |y^\varrho| \leqq \gamma\, |x^{\varrho+1}|,$$

wo γ eine endliche positive Größe darstellt".

Es ist

$$\Delta y^{\bar{\varrho}+1} = (y+1)^{\bar{\varrho}+1} - y^{\bar{\varrho}+1} = y^{\bar{\varrho}+1}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\bar{\varrho}+1} - 1\right]$$
$$= (\bar{\varrho}+1)\, y^{\bar{\varrho}}\,(1+\delta(y)), \quad \lim_{y=\infty} \delta(y) = 0.$$

Nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Größe δ kann man x_0 so groß wählen, daß für $y \geqq x_0$ $|\delta(y)| \leqq \delta$, also $1+\delta(y) \geqq 1-\delta$ ist. Aus

$$\frac{x^{\bar{\varrho}+1}}{|\varrho+1|} = \sum_x^\infty y^{\bar{\varrho}}\,(1+\delta(y)) \geqq (1-\delta)\sum_x^\infty y^{\bar{\varrho}} \quad \text{folgt}$$

$$\sum_x^\infty y^{\bar{\varrho}} \leqq \frac{x^{\bar{\varrho}+1}}{(1-\delta)\,|\bar{\varrho}+1|}.$$

Hilfssatz 9. „Ist $\bar{\varrho} < -1$ und besteht für große x die asymptotische Gleichung

$$f(x) \backsim x^\varrho\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots\right),$$

so gilt eine asymptotische Gleichung

$$\sum_x^\infty f(y) \backsim x^{\varrho+1}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right);$$

dabei ist

$$-b_0 = (\varrho+1)_1\, c_0,$$
$$-b_1 = (\varrho)_1\, c_1 + (\varrho+1)_2\, c_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-b_\nu = (\varrho-\nu+1)_1\, c_\nu + (\varrho-\nu+2)_2\, c_{\nu-1} + \cdots + (\varrho)_\nu\, c_1 + (\varrho+1)_{\nu+1}\, c_0".$$

Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist

$$f(y) = b_0 y^\varrho + b_1 y^{\varrho-1} + \cdots + b_n y^{\varrho-n} + \beta_n y^{\varrho-n}, \quad \lim_{y=\infty} \beta_n(y) = 0.$$

Setzt man

$$\mathfrak{S}_\nu = \sum_x^\infty y^{\varrho-\nu}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

so ist

---

*) Vgl. auch die Arbeiten des Verf. im 53. Bd. der Math. Ann. und im 138. Bd. dieses Journals.

$$\sum_x^\infty f(y) = b_0 \mathfrak{S}_0 + b_1 \mathfrak{S}_1 + \cdots + b_n \mathfrak{S}_n + \sum_x^\infty \beta_n y^{\varrho \quad n}.$$

Aus

$$\Delta y^{\varrho-\nu+1} = y^{\varrho-\nu+1}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\varrho-\nu+1} - 1\right]$$
$$= (\varrho-\nu+1)_1 y^{\varrho-\nu} + (\varrho-\nu+1)_2 y^{\varrho-\nu-1} + \cdots$$
$$+ (\varrho-\nu+1)_{n-\nu+1} y^{\varrho-n} + \tau_{\nu n} y^{\varrho-n}, \quad \lim_{y=\infty} \tau_{\nu n}(y) = 0$$

erhält man

$$-x^{\varrho-\nu+1} = (\varrho-\nu+1)_1 \mathfrak{S}_\nu + (\varrho-\nu+1)_2 \mathfrak{S}_{\nu+1} + \cdots$$
$$+ (\varrho-\nu+1)_{n-\nu+1} \mathfrak{S}_n + \sum_x^\infty \tau_{\nu n} y^{\varrho-n}.$$

Die zu $\nu = 0, 1, \ldots n$ gehörigen Gleichungen werden nach Multiplikation mit $c_0, c_1, \ldots c_n$ addiert und $c_0, c_1, \ldots c_n$ aus den obigen Gleichungen bestimmt. Dann ist

$$\sum_{\nu=0}^n c_\nu x^{\varrho-\nu+1} = b_0 \mathfrak{S}_0 + b_1 \mathfrak{S}_1 + \cdots + b_n \mathfrak{S}_n - \sum_x^\infty \tau_n y^{\varrho-n},$$

$$\tau_n = \sum_{\nu=0}^n \tau_{\nu n}, \quad \lim_{y=\infty} \tau_n = 0,$$

also

$$\sum_x^\infty f(y) = x^{\varrho+1}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n}\right) + \sum_x^\infty (\beta_n + \tau_n) y^{\varrho-n}$$
$$= x^{\varrho+1}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\gamma_n}{x^n}\right),$$

$$\gamma_n = x^{-\varrho-1+n} \sum_x^\infty (\beta_n + \tau_n) y^{\varrho-n}.$$

Für $y \geqq x$ ist $|\beta_n(y) + \tau_n(y)| \leqq \eta(x)$, $\lim_{x=\infty} \eta(x) = 0$; also ist

$$|\gamma_n| \leqq \eta(x) \cdot x^{-\bar{\varrho}-1+n} \sum_x^\infty y^{\bar{\varrho}-n} \leqq \gamma\, \eta(x)$$

nach Hilfssatz 8 und demnach

$$\lim_{x=\infty} \gamma_n = 0.$$

Als besonderer Fall ergibt sich die asymptotische Gleichung

$$\sum_x^\infty y^{\bar{\varrho}} \backsim -\frac{x^{\varrho+1}}{\varrho+1} + \frac{x^\varrho}{2} - \frac{\varrho\, x^{\varrho-1}}{12} + \cdots *). \qquad (\bar{\varrho} < -1)$$

Hilfssatz 10. „Wenn $|\alpha| < 1$ ist, ist für große Werte von x

$$\sum_x^\infty |\alpha^y y^\varrho| \leqq \gamma\, |\alpha^x x^\varrho|,$$

wo γ eine endliche positive Größe ist".

---

*) Die Koeffizienten von $x^{\varrho-2}, x^{\varrho-4}, \ldots$ sind gleich Null. Vgl. *Markoff*, Differenzenrechnung (Leipzig 1896), S. 128.

Es ist

$$\sum_x^\infty |\alpha|^y y^{\bar{\varrho}} = \sum_x^\infty |\alpha|^{\frac{1}{2}y} \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}y} y^{\bar{\varrho}}.$$

Wenn $\bar{\varrho} \leqq 0$ ist, oder wenn im Falle $\bar{\varrho} > 0$ x hinreichend groß genommen wird, ist für $y \geqq x$ der Differentialquotient der Funktion $|\alpha|^{\frac{1}{2}y} y^{\bar{\varrho}}$ negativ; es ist also

$$|\alpha|^{\frac{1}{2}y} y^{\bar{\varrho}} \leqq |\alpha|^{\frac{1}{2}x} x^{\bar{\varrho}},$$

$$\sum_x^\infty |\alpha|^y y^{\bar{\varrho}} \leqq |\alpha|^{\frac{1}{2}x} x^{\bar{\varrho}} \sum_x^\infty |\alpha|^{\frac{1}{2}y} = \frac{|\alpha|^x x^{\bar{\varrho}}}{1 - \sqrt{|\alpha|}}.$$

Hilfssatz 11. „Ist $|\alpha| < 1$ und gilt für große x die asymptotische Gleichung

$$f(x) \backsim \alpha^x x^\varrho \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots\right),$$

so besteht eine asymptotische Gleichung

$$\sum_x^\infty f(y) \backsim \alpha^x x^\varrho \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right);$$

dabei ist

$$-b_0 = (\alpha - 1)\, c_0,$$
$$-b_1 = (\alpha - 1)\, c_1 + \alpha\, (\varrho)_1\, c_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-b_\nu = (\alpha - 1)\, c_\nu + \alpha\, (\varrho - \nu + 1)_1\, c_{\nu-1} + \alpha\, (\varrho - \nu + 2)_2\, c_{\nu-2} + \cdots$$
$$+ \alpha\, (\varrho - 1)_{\nu-1}\, c_1 + \alpha\, (\varrho)_\nu\, c_0\text{“}.$$

Es ist

$$\Delta\, \alpha^y y^{\varrho-\nu} = \alpha^{y+1} (y+1)^{\varrho-\nu} - \alpha^y y^{\varrho-\nu}$$
$$= \alpha^y y^{\varrho-\nu} \left[\alpha \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\varrho-\nu} - 1\right]$$
$$= \alpha^y y^{\varrho-\nu} \left[\alpha - 1 + \frac{\alpha(\varrho-\nu)_1}{y} + \frac{\alpha\,(\varrho-\nu)_2}{y^2} + \cdots + \frac{\alpha\,(\varrho-\nu)_{n-\nu}}{y^{n-\nu}} + \frac{\tau_{\nu n}}{y^{n-\nu}}\right],$$
$$\lim_{y=\infty} \tau_{\nu n}(y) = 0.$$

Unter Anwendung der Bezeichnung

$$\mathfrak{S}_\nu = \sum_x^\infty \alpha^y y^{\varrho-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

folgt daraus

$$-\alpha^x x^{\varrho-\nu} = (\alpha - 1)\, \mathfrak{S}_\nu + \alpha\, (\varrho - \nu)_1\, \mathfrak{S}_{\nu+1} + \alpha\, (\varrho - \nu)_2\, \mathfrak{S}_{\nu+2} + \cdots$$
$$+ \alpha\, (\varrho - \nu)_{n-\nu}\, \mathfrak{S}_n + \sum_x^\infty \tau_{\nu n}\, \alpha^y y^{\varrho-n}.$$

Wenn man die zu $\nu = 0, 1, \ldots n$ gehörigen Gleichungen mit den oben eingeführten Größen $c_0, c_1, \ldots c_n$ multipliziert und addiert, erhält man

$$b_0 \mathfrak{S}_0 + b_1 \mathfrak{S}_1 + \cdots + b_n \mathfrak{S}_n$$
$$= \alpha^x x^\varrho \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n}\right) + \sum_x^\infty \tau_n \alpha^y y^{\varrho-n}, \quad \lim_{y=\infty} \tau_n(y) = 0.$$

Demnach ist, wenn

$$f(y) = \alpha^y y^\varrho \left(b_0 + \frac{b_1}{y} + \cdots + \frac{b_n}{y^n} + \frac{\beta_n}{y^n}\right), \quad \lim_{y=\infty} \beta_n(y) = 0$$

gesetzt wird,

$$\sum_x^\infty f(y) = b_0 \mathfrak{S}_0 + b_1 \mathfrak{S}_1 + \cdots + b_n \mathfrak{S}_n + \sum_x^\infty \beta_n \alpha^y y^{\varrho-n}$$
$$= \alpha^x x^\varrho \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\gamma_n}{x^n}\right),$$
$$\gamma_n = \alpha^{-x} x^{-\varrho+n} \sum_x^\infty (\beta_n + \tau_n) \alpha^y y^{\varrho-n},$$

also nach Hilfssatz 10

$$\lim_{x=\infty} \gamma_n = 0.$$

Insbesondere gilt die asymptotische Gleichung

$$\sum_x^\infty \alpha^y y^\varrho \backsim \alpha^x x^\varrho \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha\varrho}{(1-\alpha)^2} \frac{1}{x} + \cdots\right),$$

wenn $|\alpha| < 1$ ist.

§ 11.

Die Gleichung

$$(\alpha) \qquad \varphi(x) - \frac{1}{x^2} \sum_{x+1}^\infty \pi(x, y)\, \varphi(y) = g(x)$$

lösen wir unter der Voraussetzung, daß

$$|\pi(x, y)| \leqq M$$

für $y > x \geqq x_0$ und

$$|g(x)| \leqq \frac{N}{x^2}$$

für $x \geqq x_0$ ist. Wir setzen

$$\varphi_0(x) = g(x), \quad \varphi_{\nu+1}(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{x+1}^\infty \pi(x, y)\, \varphi_\nu(y). \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Dann ist für $x \geqq x_0$

$$|\varphi_0(x)| \leqq \frac{N}{x^2}, \quad |\varphi_\nu(x)| \leqq \frac{N(M\gamma)^\nu}{x^{\nu+2}},$$

wenn (Hilfssatz 8)

$$\sum_{x+1}^\infty \frac{1}{y^2} \leqq \frac{\gamma}{x}$$

ist; denn daraus folgt

$$|\varphi_{\nu+1}(x)| \leqq \frac{M}{x^2} \sum_{x+1}^\infty |\varphi_\nu(y)| \leqq \frac{MN(M\gamma)^\nu}{x^2} \sum_{x+1}^\infty \frac{1}{y^{\nu+2}} \leqq \frac{N(M\gamma)^{\nu+1}}{x^{\nu+3}}$$

wegen

$$\sum_{x+1}^{\infty} \frac{1}{y^{\nu+2}} \leqq \frac{1}{x^{\nu}} \sum_{x+1}^{\infty} \frac{1}{y^2} \leqq \frac{\gamma}{x^{\nu+1}}.$$

Die Reihe

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots$$

ist für $x \geqq \xi_0$ absolut und gleichmäßig konvergent, wenn ξ_0 die größere der Zahlen x_0 und $M\gamma\varkappa$ $(\varkappa > 1)$ ist, und genügt der Gleichung (α).

Wir nehmen an, die Gleichung (α) sei wie in § 9 aus der Gleichung

$$-\sum_{x}^{\infty} H(x, y)\,\varphi(y) = f(x),$$

$$H(x, y) = a_{00} + \frac{a_{10}}{x} + \frac{a_{01}}{y} + \cdots, \quad a_{00} \neq 0$$

hervorgegangen. Wenn

$$F(x) = -\sum_{x}^{\infty} H(x, y)\,\varphi(y) - f(x),$$

$$\frac{\Delta H(x, y)}{H_0(x)} = \frac{1}{x^2}\,\pi(x, y), \quad \frac{\Delta f(x)}{H_0(x)} = g(x)$$

gesetzt wird, ist

$$\Delta F(x) = F(x+1) - F(x) = H_0(x)\left[\varphi(x) - \frac{1}{x^2}\sum_{x+1}^{\infty} \pi(x, y)\,\varphi(y) - g(x)\right].$$

Wird unter $\varphi(x)$ die oben bestimmte Lösung der Gleichung (α) verstanden, so ist $F(x+1) = F(x)$; d. h. $F(x)$ ist eine periodische Funktion von x mit der Periode 1. Nun ist

$$\lim_{x=\infty} \sum_{x}^{\infty} H(x, y)\,\varphi(y) = 0$$

wegen

$$|H(x, y)| \leqq H, \quad |\varphi(y)| \leqq \frac{K}{y^2}$$

für $y \geqq x \geqq \xi_0$; wenn $\lim_{x=\infty} f(x) = 0$ ist, so ist $\lim_{x=\infty} F(x) = 0$. Daher muß die periodische Funktion $F(x)$ identisch verschwinden, also $\varphi(x)$ der ursprünglichen Summengleichung genügen.

Wir setzen jetzt

$$f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

als (konvergente oder asymptotische) Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ ohne konstantes Glied voraus, so daß

$$g(x) = \frac{b_0}{x^2} + \frac{b_1}{x^3} + \cdots$$

ist. Dann gilt eine asymptotische Gleichung

$$\varphi_\nu(x) \backsim \frac{c_{\nu\nu}}{x^{\nu+2}} + \frac{c_{\nu,\nu+1}}{x^{\nu+3}} + \cdots.$$

Dies ist zunächst für $\nu = 0$ richtig, wenn man $c_{00} = b_0$, $c_{01} = b_1, \ldots$ setzt. Gilt die Gleichung für $\varphi_\nu(x)$, so ist

$$\varphi_{\nu+1}(x) \backsim \frac{1}{x^2} \sum_{x+1}^{\infty} \pi(x, y)\left(\frac{c_{\nu\nu}}{y^{\nu+2}} + \frac{c_{\nu,\nu+1}}{y^{\nu+3}} + \cdots\right)$$

oder mit Rücksicht auf Hilfssatz 9

$$\varphi_{\nu+1}(x) \backsim \frac{c_{\nu+1,\nu+1}}{x^{\nu+3}} + \frac{c_{\nu+1,\nu+2}}{x^{\nu+4}} + \cdots.$$

Setzt man $c_\nu = c_{0\nu} + c_{1\nu} + \cdots + c_{\nu\nu}$, so ist nach Hilfssatz 7 (§ 4)

$$\varphi(x) \backsim \frac{c_0}{x^2} + \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x^4} + \cdots.$$

Wir zeigen, daß die Gleichung (α) formal befriedigt wird, wenn man für $\varphi(x)$ die Reihe

$$\frac{c_0}{x^2} + \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x^4} + \cdots$$

einsetzt. Da die Gleichung (α) durch eine Funktion von der Form

$$\varphi(x) = \frac{c_0}{x^2} + \frac{c_1}{x^3} + \cdots + \frac{c_n}{x^{n+2}} + \frac{\varepsilon_n}{x^{n+2}}, \quad \lim_{x=\infty} \varepsilon_n(x) = 0$$

befriedigt wird, so ist

$$\frac{c_0}{x^2} + \frac{c_1}{x^3} + \cdots + \frac{c_n}{x^{n+2}} + \frac{\varepsilon_n(x)}{x^{n+2}}$$
$$- \frac{1}{x^2} \sum_{x+1}^{\infty} \pi(x, y)\left(\frac{c_0}{y^2} + \frac{c_1}{y^3} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{y^{n+1}} + \frac{\varepsilon_{n-1}(y)}{y^{n+1}}\right) = \frac{b_0}{x^2} + \frac{b_1}{x^3} + \cdots$$

oder, wenn

$$\pi(x, y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\pi_\lambda(x)}{y^\lambda}$$

gesetzt wird, wo $\pi_\lambda(x)$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ ist,

$$\frac{c_0}{x^2} + \frac{c_1}{x^3} + \cdots + \frac{c_n}{x^{n+2}} + \frac{\varepsilon_n(x)}{x^{n+2}}$$
$$- \frac{1}{x^2} \sum_{\lambda=0}^{n-1} (\pi_0(x)\, c_\lambda + \pi_1(x)\, c_{\lambda-1} + \cdots) \sum_{x+1}^{\infty} \frac{1}{y^{\lambda+2}} - \frac{1}{x^2} \sum_{x+1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}_n(y)}{y^{n+1}}$$
$$= \frac{b_0}{x^2} + \frac{b_1}{x^3} + \cdots$$

mit $\lim_{y=\infty} \mathsf{E}_n(y) = 0$. Es ist (Hilfssatz 8 und 9)

$$\sum_{x+1}^{\infty} \frac{1}{y^{\lambda+2}} = \frac{1}{(\lambda+1)x^{\lambda+1}} + \frac{\gamma_{\lambda,\lambda+2}}{x^{\lambda+2}} + \cdots + \frac{\gamma_{\lambda n}}{x^n} + \frac{\delta_{\lambda n}(x)}{x^n}, \quad \lim_{x=\infty} \delta_{\lambda n}(x) = 0,$$

$$\sum_{x+1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}_n(y)}{y^{n+1}} = \frac{\Delta_n(x)}{x^n}, \quad \lim_{x=\infty} \Delta_n(x) = 0,$$

also

$$\frac{c_0}{x^2}+\frac{c_1}{x^3}+\cdots+\frac{c_n}{x^{n+2}}+\frac{\varepsilon_n(x)}{x^{n+2}}$$
$$-\sum_{\lambda=0}^{n-1}(\pi_0(x)\,c_\lambda+\pi_1(x)\,c_{\lambda-1}+\cdots)\Big(\frac{1}{(\lambda+1)\,x^{\lambda+3}}+\cdots+\frac{\gamma_{\lambda n}}{x^{n+2}}+\frac{\delta_{\lambda n}(x)}{x^{n+2}}\Big)$$
$$-\frac{\Delta_n(x)}{x^{n+2}}-\frac{b_0}{x^2}-\frac{b_1}{x^3}-\cdots=0.$$

Auf der linken Seite verschwinden, wenn man ε_n, $\delta_{\lambda n}$, Δ_n durch Null ersetzt, die Koeffizienten von $\frac{1}{x^2}, \ldots \frac{1}{x^{n+2}}$. Mit anderen Worten, wenn man die linke Seite der Gleichung

$$\frac{c_0}{x^2}+\frac{c_1}{x^3}+\cdots-\frac{1}{x^2}\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\pi_0(x)\,c_\lambda+\pi_1(x)\,c_{\lambda-1}+\cdots)\Big(\frac{1}{(\lambda+1)\,x^{\lambda+1}}+\frac{\gamma_{\lambda,\lambda+2}}{x^{\lambda+2}}+\cdots\Big)$$
$$-\frac{b_0}{x^2}-\frac{b_1}{x^3}-\cdots=0$$

durch formale Rechnung nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ entwickelt, so erhält man durch Nullsetzen des Koeffizienten von $\frac{1}{x^{\lambda+2}}$ eine Gleichung zur Berechnung von $c_\lambda\,(\lambda=0,1,2,\ldots)$.

Wir haben den Satz:

Die Gleichung

$$-\sum_{x}^{\infty}H(x,y)\,\varphi(y)=f(x),$$

worin $H(x,y)$ in eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ mit einem von Null verschiedenen konstanten Glied und $f(x)$ in eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ ohne konstantes Glied entwickelbar ist, hat eine Lösung in Form einer für große Werte von x konvergenten Reihe

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots;$$

dabei ist

$$\varphi_0(x)=\frac{\Delta f(x)}{H(x,x)},\quad \varphi_{\nu+1}(x)=\sum_{x+1}^{\infty}\frac{\Delta H(x,y)}{H(x,x)}\varphi_\nu(y).\qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

Es gilt eine asymptotische Darstellung

$$\varphi(x)\backsim\frac{c_0}{x^2}+\frac{c_1}{x^3}+\frac{c_2}{x^4}+\cdots.$$

§ 12.

Zur Lösung der homogenen Summengleichung

$$(\beta')\quad \varphi(x+1)-\Big(1+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\cdots\Big)\varphi(x)-\frac{1}{x^3}\sum_{x+2}^{\infty}\omega(x,y)\,\varphi(y)=0$$

setzen wir die folgende Kette von linearen Differenzengleichungen erster Ordnung an:

$$\varphi_0(x+1) - \Big(1 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots\Big)\varphi_0(x) = 0,$$

$$\varphi_{\nu+1}(x+1) - \Big(1 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots\Big)\varphi_{\nu+1}(x) = \Phi_\nu(x),$$

$$\Phi_\nu(x) = \frac{1}{x^3} \sum_{x+2}^{\infty} \omega(x, y)\, \varphi_\nu(y). \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Zunächst ist

$$\frac{\varphi_0(x+1)}{\varphi_0(x)} = \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^{\varrho} \Big(1 + \frac{\beta_2}{x^2} + \frac{\beta_3}{x^3} + \cdots\Big),$$

wo $\varrho = \alpha_1$ ist. Setzt man

$$\varphi_0(x) = x^{\varrho}\, \mathfrak{p}(x),$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{p}(x+1)}{\mathfrak{p}(x)} = 1 + \frac{\beta_2}{x^2} + \frac{\beta_3}{x^3} + \cdots,$$

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{\prod_x^{\infty}\Big(1 + \frac{\beta_2}{y^2} + \frac{\beta_3}{y^3} + \cdots\Big)},$$

woraus eine asymptotische Gleichung

$$\mathfrak{p}(x) \backsim 1 + \frac{c_{01}}{x} + \frac{c_{02}}{x^2} + \cdots$$

folgt*). Wir nehmen $\bar{\varrho} < -1$ an und erhalten

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -\, x^{\varrho}\, \mathfrak{p}(x) \sum_x^{\infty} \frac{y^{-\varrho}\, \Phi_\nu(y)}{\Big(1 + \frac{\alpha_1}{y} + \cdots\Big)\mathfrak{p}(y)}. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Wir zeigen, daß, wenn für $x \geqq x_0$, $y > x$

$$|\mathfrak{p}(x)| \leqq p, \quad \frac{1}{\Big|\Big(1 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots\Big)\mathfrak{p}(x)\Big|} \leqq q, \quad |\omega(x, y)| \leqq M,$$

$$\sum_{x+2}^{\infty} |y^{\varrho}| \leqq \gamma |x^{\varrho+1}|, \quad \sum_x^{\infty} \frac{1}{y^2} \leqq \frac{\delta}{x}$$

(Hilfssatz 8) ist, die Ungleichung besteht:

$$|\varphi_\nu(x)| \leqq C_\nu\, x^{\bar{\varrho}-\nu}, \quad C_\nu = p\,(Mpq\gamma\delta)^\nu.$$

Daraus folgt nämlich

---

*) Es ist

$$\log \mathfrak{p}(x) = -\sum_x^{\infty} \log\Big(1 + \frac{\beta_2}{y^2} + \cdots\Big) = \sum_x^{\infty}\Big(\frac{\gamma_2}{y^2} + \frac{\gamma_3}{y^3} + \cdots\Big) \backsim \frac{\delta_1}{x} + \frac{\delta_2}{x^2} + \cdots$$

nach Hilfssatz 9. Vgl. Math. Annalen, Bd. 53, S. 184.

$$|\Phi_\nu(x)| \leqq \frac{1}{x^3} M C_\nu \sum_{x+2}^{\infty} y^{\varrho-\nu} \leqq \frac{1}{x^{3+\nu}} M C_\nu \sum_{x+2}^{\infty} y^{\varrho} \leqq M C_\nu \gamma x^{\varrho-\nu-2},$$

$$|\varphi_{\nu+1}(x)| \leqq C_\nu M p q \gamma x^{\varrho} \sum_{x}^{\infty} y^{-\nu-2} \leqq C_\nu M p q \gamma x^{\varrho-\nu} \sum_{x}^{\infty} y^{-2} \leqq C_\nu M p q \gamma \delta x^{\varrho-\nu-1}.$$

Die Reihe

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots$$

ist für hinreichend große Werte von x konvergent und genügt der Gleichung (β').

Wenn, wie in § 9, $\omega(x, y)$ eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ist, gilt eine asymptotische Gleichung

$$\varphi_\nu(x) \backsim x^\varrho \left(\frac{c_{\nu\nu}}{x^\nu} + \frac{c_{\nu,\nu+1}}{x^{\nu+1}} + \cdots\right);$$

denn daraus folgt

$$\begin{aligned}
\Phi_\nu(x) &\backsim \frac{1}{x^3} \sum_{x+2}^{\infty} \omega(x, y)\,(c_{\nu\nu} y^{\varrho-\nu} + c_{\nu,\nu+1} y^{\varrho-\nu-1} + \cdots) \\
&\backsim C_{\nu\nu} x^{\varrho-\nu-2} + C_{\nu,\nu+1} x^{\varrho-\nu-3} + \cdots, \\
\varphi_{\nu+1}(x) &\backsim -x^\varrho \left(1 + \frac{c_{01}}{x} + \cdots\right) \sum_{x}^{\infty} \frac{C_{\nu\nu} y^{-\nu-2} + \cdots}{\left(1 + \frac{\alpha_1}{y} + \cdots\right)\left(1 + \frac{c_{01}}{y} + \cdots\right)} \\
&\backsim x^\varrho \left(\frac{c_{\nu+1,\nu+1}}{x^{\nu+1}} + \frac{c_{\nu+1,\nu+2}}{x^{\nu+2}} + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Wenn man $c_\nu = c_{0\nu} + c_{1\nu} + c_{2\nu} + \cdots + c_{\nu\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ setzt, ist

$$\varphi(x) \backsim x^\varrho \left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right).$$

Wie in § 11 erkennt man, daß die gefundene Reihe der Gleichung (β') formal genügt.

Es ist zu zeigen, daß die Funktion $\varphi(x)$ auch der ursprünglichen Summengleichung genügt. Setzt man

$$F(x) = -\sum_{x}^{\infty} x H(x, y) \varphi(y),$$

so ist

$$\Delta F(x) = x H_0(x) \varphi(x) - \sum_{x+1}^{\infty} (x \Delta H(x, y) + H(x+1, y)) \varphi(y),$$

$$\Delta^2 F(x) = Q(x) \left[\varphi(x+1) - \left(1 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots\right) \varphi(x) - \frac{1}{x^3} \sum_{x+2}^{\infty} \omega(x, y) \varphi(y)\right].$$

Wegen $\Delta^2 F(x) = 0$ ist $\Delta F(x)$ eine periodische Funktion von x mit der Periode 1. Nun ist

$$\Delta F(x) \backsim \left(a_{10} + a_{01} + \frac{a_{01}}{\varrho}\right) x^\varrho + \cdots,$$

also $\lim_{x=\infty} \Delta F(x) = 0$ und folglich $\Delta F(x) \equiv 0$. Daraus folgt wieder, daß $F(x)$ die Periode 1 besitzt. Es ist

$$F(x) \sim \left(\frac{a_{10}}{\varrho+1} + \frac{a_{01}}{\varrho}\right) x^{\varrho+1} + \cdots$$

oder, da $\overline{\varrho} + 1 < 0$ ist, $\lim_{x=\infty} F(x) = 0$, also $F(x) \equiv 0$ oder

$$\sum_x^{\infty} H(x, y)\, \varphi(y) = 0.$$

Es gilt also der Satz:

Die homogene Summengleichung

$$\sum_x^{\infty} H(x, y)\, \varphi(y) = 0,$$

worin

$$H(x, y) = \frac{a_{10}}{x} + \frac{a_{01}}{y} + \cdots, \quad a_{10} + a_{01} \neq 0$$

ist, hat, wenn der reelle Teil von

$$\varrho = -\frac{a_{01}}{a_{10} + a_{01}}$$

kleiner als -1 *ist, eine Lösung* $\varphi(x)$, *welche für große Werte von* x *durch die in* § 12 *berechnete konvergente Reihe* $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \cdots$ *dargestellt wird und einer asymptotischen Gleichung*

$$\varphi(x) \sim x^{\varrho}\left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right)$$

genügt.

§ 13.

Die homogene Summengleichung

$$(\gamma') \quad \varphi(x+1) - \left(\alpha + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots\right)\varphi(x) - \frac{1}{x^2}\sum_{x+2}^{\infty} \omega(x, y)\, \varphi(y) = 0$$

lösen wir im Falle $|\alpha| < 1$, indem wir nach einander die linearen Differenzengleichungen erster Ordnung ansetzen:

$$\varphi_0(x+1) - \left(\alpha + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots\right)\varphi_0(x) = 0,$$

$$\varphi_{\nu+1}(x+1) - \left(\alpha + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots\right)\varphi_{\nu+1}(x) = \Phi_{\nu}(x),$$

$$\Phi_{\nu}(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{x+2}^{\infty} \omega(x, y)\, \varphi_{\nu}(y). \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Zunächst ist

$$\frac{\varphi_0(x+1)}{\varphi_0(x)} = \alpha + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots = \alpha\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\varrho}\left(1 + \frac{\beta_2}{x^2} + \frac{\beta_3}{x^3} + \cdots\right),$$

wo $\varrho = \frac{\alpha_1}{\alpha}$ ist, so daß

$$\varphi_0(x) = \alpha^x x^\varrho \mathfrak{p}(x),$$

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{1}{\prod_x^\infty \left(1 + \frac{\beta_2}{y^2} + \frac{\beta_3}{y^3} + \cdots\right)} \backsim 1 + \frac{c_{01}}{x} + \frac{c_{02}}{x^2} + \cdots$$

gesetzt werden kann. Die Differenzengleichung für $\varphi_{\nu+1}(x)$ hat die Lösung

$$\varphi_{\nu+1}(x) = -\alpha^x x^\varrho \mathfrak{p}(x) \sum_x^\infty \frac{\alpha^{-y} y^{-\varrho} \Phi_\nu(y)}{\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{y} + \cdots\right)\mathfrak{p}(y)}.$$

Für $x \geqq x_0$ (x_0 hinreichend groß), $y > x$ sei

$$|\mathfrak{p}(x)| \leqq p, \quad \frac{1}{\left|\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots\right)\mathfrak{p}(x)\right|} \leqq q, \quad |\omega(x,y)| \leqq M,$$

$$\sum_{x+2}^\infty |\alpha^y y^\varrho| \leqq \gamma |\alpha^x x^\varrho|, \quad \sum_x^\infty \frac{1}{y^2} \leqq \frac{\delta}{x}$$

(Hilfssätze 10 und 8). Dann ist für $x \geqq x_0$

$$|\varphi_\nu(x)| \leqq C_\nu |\alpha|^x x^{\bar{\varrho}-\nu}, \quad C_\nu = p(Mpq\gamma\delta)^\nu.$$

Denn daraus folgt

$$|\Phi_\nu(x)| \leqq \frac{1}{x^2} C_\nu M \sum_{x+2}^\infty |\alpha|^y y^{\bar{\varrho}-\nu} \leqq \frac{1}{x^{\nu+2}} C_\nu M \sum_{x+2}^\infty |\alpha|^y y^{\bar{\varrho}}$$

$$\leqq C_\nu M\gamma |\alpha|^x x^{\bar{\varrho}-\nu-2},$$

$$|\varphi_{\nu+1}(x)| \leqq C_\nu Mpq\gamma \cdot |\alpha|^x x^{\bar{\varrho}} \sum_x^\infty y^{-\nu-2} \leqq C_\nu Mpq\gamma\delta |\alpha|^x x^{\bar{\varrho}-\nu-1}$$

wegen

$$\sum_x^\infty y^{-\nu-2} \leqq x^{-\nu} \sum_x^\infty y^{-2} \leqq \delta x^{-\nu-1}.$$

Wenn ξ_0 die größere der Zahlen x_0 und $Mpq\gamma\delta \cdot z$ ($z > 1$) ist, ist die Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^\infty \varphi_\nu(x)$$

für $x \geqq \xi_0$ absolut und gleichmäßig konvergent. Die Funktion $\varphi(x)$ genügt der Gleichung (γ') und besitzt eine asymptotische Darstellung

$$\varphi(x) \backsim \alpha^x x^\varrho \left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right).$$

Es ist nämlich

$$\varphi_\nu(x) \backsim \alpha^x x^\varrho \left(\frac{c_{\nu\nu}}{x^\nu} + \frac{c_{\nu,\nu+1}}{x^{\nu+1}} + \cdots\right);$$

denn daraus folgt mit Rücksicht auf die Hilfssätze 11 und 10

$$\Phi_\nu(x) \backsim \alpha^x x^{\varrho-2} \left(\frac{C_{\nu\nu}}{x^\nu} + \frac{C_{\nu,\nu+1}}{x^{\nu+1}} + \cdots\right),$$

$$\varphi_{\nu+1}(x) \backsim \alpha^x x^\varrho \left(\frac{c_{\nu+1,\nu+1}}{x^{\nu+1}} + \frac{c_{\nu+1,\nu+2}}{x^{\nu+2}} + \cdots\right).$$

Wenn $c_\nu = c_{0\nu} + c_{1\nu} + \cdots + c_{\nu\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ gesetzt wird, ergibt sich nach Hilfssatz 7 die obige asymptotische Darstellung.

Daß die Funktion $\varphi(x)$ auch der ursprünglichen Summengleichung genügt, erkennt man wie in § 12. Man zeigt auch, daß die gefundene asymptotische Reihe der Gleichung (γ') formell genügt.

Es gilt also der Satz:

Die homogene Summengleichung

$$\sum_x^\infty H(x, y)\varphi(y) = 0,$$

worin

$$H(x, y) = \frac{a_{10}}{x} + \frac{a_{01}}{y} + \cdots,$$

$$a_{10} + a_{01} = 0, \quad a_{20} + a_{11} + a_{02} + a_{01} \neq 0$$

ist, besitzt, wenn der absolute Betrag von

$$\alpha = \frac{a_{20} + a_{11} + a_{02}}{a_{20} + a_{11} + a_{02} + a_{01}}$$

kleiner als 1 *ist, eine Lösung* $\varphi(x)$, *welche durch die in* § 13 *berechnete, für große* x *konvergente Reihe* $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \cdots$ *dargestellt wird und einer asymptotischen Gleichung*

$$\varphi(x) \backsim \alpha^x x^\varrho \left(1 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots\right)$$

genügt.

Die Behandlung der homogenen Summengleichungen in diesem und dem vorangehenden Paragraphen entspricht der Lösung der homogenen Integralgleichungen in § 2 und § 5. Hiernach ist es wohl nicht mehr erforderlich, zu zeigen, wie sich die in § 3 und §§ 6—7 geführten Untersuchungen über nicht homogene Integralgleichungen auf die nicht homogene Summengleichung

$$-\sum_x^\infty H(x, y)\varphi(y) = f(x)$$

unter der Voraussetzung übertragen lassen, daß $H(x, y)$ die in § 12 und § 13 angegebene Form hat.

Über die Kurven auf einer Fläche, deren sphärische Bilder größte Kreise sind*).

Von Herrn *R. Neuendorff* in Kiel.

Inhalt.

Einleitung. — 1. Die Gleichung der Hauptkreiskurven. — 2. Die Hauptkreiskurven auf abwickelbaren Flächen. — 3. Die Hauptkreiskurven auf Rotationsflächen. — 4. Die Drehung der Normalen längs Hauptkreiskurven zwischen sphärischen Orthogonalkurven. — 5. Eine andere Gleichung der Hauptkreiskurven. — 6. Über die Flächen, auf denen die Krümmungskurven zugleich Hauptkreiskurven sind. — 7. Bestimmung aller Flächen, auf denen die Minimalkurven zugleich Hauptkreiskurven sind. — 8. Die *Weingarten*schen Flächen, auf denen die Minimalkurven zugleich Hauptkreiskurven sind. — 9. Bestimmung aller Flächen, auf denen die geodätischen Kurven mit den Hauptkreiskurven identisch sind. — 10. Bestimmung aller Flächen, auf denen die Asymptotenkurven zugleich Hauptkreiskurven sind. — 11. Die *Weingarten*schen Flächen, auf denen die Asymptotenkurven zugleich Hauptkreiskurven sind. — 12. Über die Abbildung von Flächen aufeinander, bei der Hauptkreiskurven in Hauptkreiskurven übergehen. — 13. Spezieller Fall der Abbildung zweier Flächen aufeinander mit gleichem Winkelelement. — 14. Schlußwort.

Einleitung.

Auf einer Fläche seien zwei Punkte P und Q gegeben und die Normalen der Fläche in diesen Punkten. Bewegt sich P auf einer Flächenkurve nach Q, so wird die Normale in P längs dieser Kurve zu drehen sein, bis sie mit der Normale in Q zusammenfällt. Die Drehung, die die Normale bei der ganzen Bewegung erfährt, wird durch die Summe aller Winkelelemente von Punkt zu Punkt der Kurve zu messen sein. Diese Winkelelemente sind aber gleich den Bogenelementen auf der zugehörigen *Gauß*schen Einheitskugel. Soll die Drehung, also jene Summe der Winkel-

*) Als Habilitationsschrift von der philosophischen Fakultät in Kiel angenommen.

elemente, innerhalb eines kleinen Bereiches ein Minimum sein, so muß sich der Flächenpunkt auf einer Kurve bewegen, deren sphärisches Bild eine geodätische Linie der *Gauß*schen Kugel ist, d. h. also ein *Hauptkreis*. In diesem Falle allein ist die Summe aller Winkelelemente gleich dem von den Normalen in P und Q gebildeten Winkel. In einem größeren Flächenteil brauchen die fraglichen Kurven nicht immer die erwähnte Minimumseigenschaft zu besitzen.

Ganz allgemein sollen nunmehr die Kurven, deren sphärische Bilder größte Kreise oder Hauptkreise der *Gauß*schen Kugel sind, *Hauptkreiskurven* genannt werden.

Diese Kurven können unabhängig von der *Gauß*schen Kugel in folgender Weise definiert werden. Zwei benachbarte Normalen einer Fläche bestimmen eine Ebene, zu der sie beide parallel sind (ein Büschel paralleler Ebenen, von denen eine beliebige ausgewählt ist). Schreitet man auf der Fläche so fort, daß die Flächennormalen in den sämtlichen Kurvenpunkten jener Ebene parallel bleiben, so ist die Kurve eine Hauptkreiskurve. In der Tat ist das sphärische Bild dann und nur dann ein Hauptkreis. Zugleich erkennt man, daß durch einen allgemeinen Flächenpunkt unendlich viele Hauptkreiskurven gehen. Ist der Punkt und eine Fortschreitungsrichtung gegeben, so ist eine Hauptkreiskurve eindeutig bestimmt. Zwei beliebige Flächenpunkte können im allgemeinen nur durch eine Hauptkreiskurve verbunden werden.

1. Die Gleichung der Hauptkreiskurven.

Die Gleichung der Kurvenscharen kann so hergeleitet werden. Die Normalen in drei benachbarten Flächenpunkten haben die Richtungskosinus

$$X, Y, Z;\quad X+dX,\ Y+dY,\ Z+dZ;\quad X+2dX+d^2X,\ Y+2dY+d^2Y,\ Z+2dZ+d^2Z.$$

Sollen alle drei derselben Ebene parallel sein, so liegen ihre uneigentlichen Punkte auf einer Geraden. Daraus erhält man die gesuchte Gleichung in der Determinantenform

$$(1.)\qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \\ d^2X & d^2Y & d^2Z \end{vmatrix} = 0, \text{ oder auch } \Sigma X(dY\,d^2Z - dZ\,d^2Y) = 0.$$

Dieser Ausdruck soll entwickelt werden, indem man u und v als Funktionen eines Parameters t auffaßt. Ferner sollen die Fundamentalgrößen der Einheitskugel mit $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden.

Dann können zunächst die sämtlichen Kurvennormalen parallel sein. In diesem Falle wird das Winkelelement

$$d\varphi^2 = \mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}dudv + \mathfrak{G}dv^2 = 0.$$

Die Kurven sind die Kreispunktpolarkurven der Fläche, deren sphärische Bilder die Minimalkurven sind. Geradeso, wie die Minimalkurven zu den geodätischen Kurven gerechnet werden, so sollen auch die Kreispunktpolarkurven als Hauptkreiskurven gelten.

Die geradlinigen Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche sind zugleich Kreispunktpolarkurven*), demnach auch Hauptkreiskurven. Dagegen braucht eine beliebige gerade Linie auf einer Fläche im allgemeinen nicht Hauptkreiskurve zu sein.

Ganz abzusehen ist von den Tangentenflächen der Minimalkurven, da auf ihnen von einer Richtung der Normalen nicht gesprochen werden kann. Sie sollen daher ein für alle Mal ausgeschlossen sein.

Sind dagegen die Normalen nicht untereinander parallel, dann kann (1.) auf die Form gebracht werden:

$$(2.)\quad \begin{vmatrix} \mathfrak{E}u' + \mathfrak{F}v' & \frac{1}{2}\mathfrak{E}_u u'^2 + \mathfrak{E}_v u'v' + \left(\mathfrak{F}_v - \frac{1}{2}\mathfrak{G}_u\right)v'^2 + \mathfrak{E}u'' + \mathfrak{F}v'' \\ \mathfrak{F}u' + \mathfrak{G}v' & \left(\mathfrak{F}_u - \frac{1}{2}\mathfrak{E}_v\right)u'^2 + \mathfrak{G}_u u'v' + \frac{1}{2}\mathfrak{G}_v v'^2 + \mathfrak{F}u'' + \mathfrak{G}v'' \end{vmatrix} = 0.$$

Statt die sehr umständliche Ausrechnung von (1.) wirklich durchzuführen, kann man natürlich Gleichung (2.) unmittelbar als die der geodätischen Kurven auf der *Gauß*schen Kugel hinschreiben.

Ganz unabhängig auch von den Flächennormalen ergibt sich endlich eine Erzeugung der Hauptkreiskurven, wenn man berücksichtigt, daß der kürzeste Abstand benachbarter Normalen dieselbe Richtung hat wie die zu der zugehörigen Fortschreitungsrichtung auf der Fläche konjugierte Richtung. Wählt man daher in einem Punkte P eine beliebige Richtung PQ aus und konstruiert die dazu konjugierte Richtung PR, so hat man durch Q die zu PR parallele Richtung zu bestimmen und die zu dieser parallelen wieder konjugierte usw. jedesmal zur Parallelen von PR. Dabei ist zu

*) Vgl. meine Diss. „Über Kreispunktpolarkurven". Kiel 1908. S. 8.

beachten: Die Schnittgerade der Tangentenebenen in P und Q hat die Richtung der zu PQ konjugierten Richtung durch P, so daß es durch Q im allgemeinen wirklich eine und nur eine Parallele zu PR gibt. Die sämtlichen konjugierten Richtungen bestimmen dann eine Hauptkreiskurve. Es ist bei dieser infinitesimalen Erzeugung jedoch stets von einem Punkt zum unendlich benachbarten fortzuschreiten.

Setzt man statt des Bogenelements der Fläche das Winkelelement und statt der Fundamentalgrößen erster Ordnung diejenigen der *Gauß*schen Kugel, so besteht zwischen den geodätischen Kurven und den Hauptkreiskurven weitgehende Analogie, wie im folgenden näher ausgeführt werden wird.

In dieser allgemeinen Beziehung scheinen die Hauptkreiskurven bisher nicht untersucht worden zu sein. Nur in dem Parametersystem der Meridiankurven und der Kurven gleicher Polhöhe*) haben sie Erwähnung gefunden.

2. Die Hauptkreiskurven auf abwickelbaren Flächen.

Es ist schon oben erwähnt, daß die Tangentenflächen der Minimalkurven, da bei ihnen von Richtungen der Normalen nicht gesprochen werden kann, überhaupt auszuschließen sind. Auch die abwickelbaren Flächen im allgemeinen lassen sich vorweg leicht erledigen. Die sphärische Abbildung kann man so hergestellt denken, daß an die Einheitskugel Tangentenebenen parallel zu den Tangentenebenen der abwickelbaren Fläche gelegt werden. Dann reduziert sich bekanntlich die sphärische Abbildung auf eine Kurve. Jede Kurve zwischen zwei Punkten der Fläche liefert dieselbe Größe der Drehung der Flächennormale, jedoch ist im allgemeinen die Drehung (Summe aller Winkelelemente) verschieden von dem Winkel, den die Normalen in den Flächenpunkten selbst miteinander bilden. Die Kurven, deren sphärisches Bild ja auch im allgemeinen kein Hauptkreis der Kugel ist, sind daher nicht den Hauptkreiskurven zuzurechnen. Nur die Zylinder bilden eine Ausnahme, da sie als sphärisches Bild einen Hauptkreis der Kugel besitzen. Umgekehrt schneiden sich die Tangentialebenen an einem Hauptkreis der Kugel in parallelen Geraden, so daß die erzeugenden Geraden der abwickelbaren Fläche, deren sphärisches Bild

*) Siehe Abschnitt 5 dieser Arbeit.

jener Hauptkreis ist, parallel sein müssen, also einen Zylinder bilden. Auf einem Zylinder ist daher jede Kurve eine Hauptkreiskurve. Wie schon oben erwähnt, sind die geradlinigen Erzeugenden als Kreispunktpolarkurven jedenfalls auch Hauptkreiskurven.

Also hat sich ergeben:

Auf abwickelbaren Flächen sind die geradlinigen Erzeugenden im allgemeinen die einzigen Hauptkreiskurven. Eine Ausnahme bilden die Zylinder, auf denen jede Kurve als Hauptkreiskurve aufzufassen ist. Ganz abzusehen ist von den Tangentenflächen einer Minimalkurve.

3. Die Hauptkreiskurven auf Rotationsflächen.

Eine Hauptkreiskurve sei auf einer Fläche dadurch festgelegt, daß v als Funktion von u selbst gegeben wird. Dann wird aus Gleichung (2.)

$$(3.)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{E}+\mathfrak{F}\frac{dv}{du} & \frac{1}{2}\mathfrak{E}_u+\mathfrak{E}_v\frac{dv}{du}+\left(\mathfrak{F}_v-\frac{1}{2}\mathfrak{G}_u\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\mathfrak{F}\frac{d^2v}{du^2} \\ \mathfrak{F}+\mathfrak{G}\frac{dv}{du} & \mathfrak{F}_u-\frac{1}{2}\mathfrak{E}_v+\mathfrak{G}_u\frac{dv}{du}+\frac{1}{2}\mathfrak{G}_v\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\mathfrak{G}\frac{d^2v}{du^2} \end{vmatrix}=0.$$

Dabei sind allerdings die Kurven $u=\text{const.}$ ausgeschlossen; diese sind Hauptkreiskurven, wenn für alle Werte von v die Gleichung besteht

$$(4.)\qquad \mathfrak{F}\mathfrak{G}_v-2\mathfrak{G}\mathfrak{F}_v+\mathfrak{G}\mathfrak{G}_u=0.$$

Nunmehr sei eine Rotationsfläche gegeben durch die Gleichungen

$$x=p(u)\cos v\,;\quad y=p(u)\sin v\,;\quad z=q(u).$$

Die sechs Fundamentalgrößen sind hier

$$E=1,\ F=0,\ G=p^2,\ L=-\frac{p''}{q'},\ M=0,\ N=pq'$$

und folglich wird

$$\mathfrak{E}=\frac{p''^2}{q'^2},\ \mathfrak{F}=0,\ \mathfrak{G}=q'^2.$$

Die Kurven $u=\text{const.}$ sind nur Hauptkreiskurven, wenn für jedes v

$$\frac{\partial G^2}{\partial u}=0,\ \text{d. h.}\ q'^2=\text{const.}$$

ist. Dann aber folgt aus $p'^2+q'^2=1$, daß $p''=0$ also auch $\mathfrak{E}$ und demnach $\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2=0$ sein muß. Also sind nur auf abwickelbaren Rotationsflächen die Breitenkreise zugleich Hauptkreiskurven. Das sind aber nur Ebenen, Rotationszylinder und Rotationskegel; doch sind, wie oben ausgeführt, die Rotationskegel nicht mitzuzählen, da auf ihnen nur die geradlinigen Erzeugenden Hauptkreiskurven sind.

Die übrigen Hauptkreiskurven der Rotationsflächen genügen der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{E} & \frac{1}{2}\mathfrak{E}_u - \frac{1}{2}\mathfrak{G}_u\left(\frac{dv}{du}\right)^2 \\ \mathfrak{G}\frac{dv}{du} & \mathfrak{G}_u\frac{dv}{du} + \mathfrak{G}\frac{d^2v}{du^2} \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$(5.) \qquad \mathfrak{E}\mathfrak{G}\frac{d^2v}{du^2} + \left(\mathfrak{E}\mathfrak{G}_u - \frac{1}{2}\mathfrak{E}_u\mathfrak{G}\right)\frac{dv}{du} + \frac{1}{2}\mathfrak{G}\mathfrak{G}_u\left(\frac{dv}{du}\right)^3 = 0.$$

Setzt man

$$\frac{\mathfrak{G}_u}{\mathfrak{G}} = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{E}_u}{\mathfrak{E}} = \alpha, \quad -\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{G}_u}{\mathfrak{E}} = \beta, \quad \frac{dv}{du} = \varphi, \quad \frac{d^2v}{du^2} = \frac{d\varphi}{du},$$

so wird aus (5.)

$$\frac{d\varphi}{du} + \alpha\varphi = \beta\varphi^3,$$

woraus φ als Funktion von u berechnet werden kann. Man erhält nämlich zunächst

$$\frac{d\frac{1}{\varphi^2}}{du} - \frac{2\alpha}{\varphi^2} = -2\beta$$

und daraus, wenn man in bekannter Weise mit $e^{\int -2\alpha\, du}$ erweitert,

$$\frac{d}{du}\frac{e^{\int -2\alpha\, du}}{\varphi^2} = -2\beta e^{\int -2\alpha\, du}$$

oder

$$\frac{e^{\int -2\alpha\, du}}{\varphi^2} = a - 2\int \beta e^{\int -2\alpha\, du}\, du.$$

Weiter ist aber

$$-2\alpha = \frac{\mathfrak{E}_u}{\mathfrak{E}} - 2\frac{\mathfrak{G}_u}{\mathfrak{G}} = \frac{d}{du}\left(\log\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}^2}\right),$$

so daß bleibt

$$\frac{\mathfrak{E}}{\varphi^2\mathfrak{G}^2} = a + \int \frac{\mathfrak{G}_u}{\mathfrak{G}^2}\, du = b - \frac{1}{\mathfrak{G}},$$

wo die beiden Integrationskonstanten zu einer b zusammengefaßt sind.

Setzt man noch für φ seinen Wert, so folgt unmittelbar

$$\frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{(\mathfrak{G}b-1)\mathfrak{G}}},$$

also

$$v = a + \int \sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{(\mathfrak{G}b-1)\mathfrak{G}}}\, du.$$

Hierin sind noch für die Fundamentalgrößen ihre Werte zu setzen. Dabei ergibt sich

$$v = a + \int \frac{p''\,du}{(1-p'^2)\sqrt{b-1-bp'^2}}.$$

Das Integral läßt sich auswerten, wenn man z. B. setzt

$$p'\sqrt{b} = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-b}.$$

Nach einfachen Umformungen erhält man

$$v - a = \operatorname{arc\,tg}\frac{i}{\sqrt{b}}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} \quad \text{oder also} \quad \operatorname{tg}(v-a) = \frac{p'}{\sqrt{b-1-bp'^2}},$$

wofür sich auch schreiben läßt

$$\operatorname{tg}^2(v-a) = \frac{1-q'^2}{bq'^2-1},$$

da ja in diesem Falle $p'^2 + q'^2 = 1$ ist.

Das Ergebnis lautet:

Sieht man von abwickelbaren Flächen ab, so erhält man auf Rotationsflächen, die in der Form dargestellt sind

$$x = p(u)\cos v,\ y = p(u)\sin v,\ z = q(u),$$

die Hauptkreiskurven durch die endliche Gleichung

$$\operatorname{tg}^2(v-a) = \frac{1-q'^2}{bq'^2-1};$$

a und b sind willkürliche Konstanten.

4. Die Drehung der Normalen längs Hauptkreiskurven zwischen sphärischen Orthogonalkurven.

Man wähle als Parameterkurven eine beliebige Schar $u = \text{const.}$ von ∞^1 Hauptkreiskurven und dazu eine Kurvenschar $v = \text{const.}$, deren sphärische Bilder zu denen der ersten Schar orthogonal sind; sie seien hier kurz die *sphärischen Orthogonalkurven der ersten Schar* genannt.

Dann ist $\mathfrak{F} = 0$ und, da $u = \text{const.}$ Hauptkreiskurven sind, nach (4.)

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G}_u = 0.$$

Also ist entweder $\mathfrak{G}$ eine Funktion von v allein, oder $\mathfrak{G} = 0$.

Ist $\mathfrak{G} = 0$, so sind die Kurven $u = \text{const.}$ Kreispunktpolarkurven. Man würde für das Winkelelement

$$d\varphi^2 = 0$$

erhalten.

Damit ferner sphärische Orthogonalkurven überhaupt auf der Fläche vorhanden sind, muß $\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 \neq 0$ sein; es muß also von abwickelbaren Flächen abgesehen werden.

Im allgemeinen Falle hat das Winkelelement den Wert

$$d\varphi^2 = \mathfrak{E}(u, v)\, du^2 + \mathfrak{G}(v)\, dv^2.$$

Mißt man die Drehung der Flächennormale längs irgendeiner Hauptkreiskurve $u = \text{const.}$ von einer Kurve $v = 0$ bis zu v, so erhält man den Wert

$$\varphi = \int_0^v \sqrt{\mathfrak{G}(v)}\, dv,$$

der von u unabhängig also auf allen Kurven $u = \text{const.}$ gleich groß ist. Daraus folgt der Satz*):

Wählt man auf einer Fläche irgendeine Schar von ∞^1 Hauptkreiskurven und zieht zwei beliebige Kurven, deren sphärische Bilder zu denen jener Schar orthogonal sind, so ist die Drehung der Flächennormale längs der Hauptkreiskurven zwischen den Orthogonalkurven überall gleich groß.

Die oben gewählten Parameter mögen das System der *Hauptkreisparameter* genannt werden.

Da $\mathfrak{F} = HM - KF$ ist, so bilden die Hauptkreisparameterkurven auf der Fläche selbst ein Orthogonalsystem, wenn entweder die Fläche eine Minimalfläche ist, oder wenn die Krümmungskurven das System der Hauptkreisparameterkurven sind. Das führt darauf, nach den Flächen zu fragen, auf denen die Krümmungskurven zugleich Hauptkreiskurven sind (vgl. Abschnitt 6).

5. Eine andere Gleichung der Hauptkreiskurven.

Die Ergebnisse von Abschnitt 4 hätte man unmittelbar aus der Theorie der geodätischen Parameter folgern können. Weitere Anwendungen ergeben sich folgendermaßen. Gehen von einem Flächenpunkte A aus nach den beiden benachbarten Punkten B und C die Fortschreitungsrichtungen $dv : du$ und $dv_1 : du_1$ und errichtet man in den drei Punkten die Flächennormalen a, b und c, so ist der Winkel der kürzesten Abstände zwischen (a, b) und (a, c) gegeben durch die Gleichung:

---

*) Vgl. z. B. *Scheffers*, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Bd. II (1902), S. 434.

$$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{E} + \mathfrak{F}\left(\frac{dv}{du} + \frac{dv_1}{du_1}\right) + \mathfrak{G}\,\frac{dv}{du}\,\frac{dv_1}{du_1}}{\sqrt{\left[\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}\,\frac{dv}{du} + \mathfrak{G}\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]\left[\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}\,\frac{dv_1}{du_1} + \mathfrak{G}\left(\frac{dv_1}{du_1}\right)^2\right]}}.$$

Natürlich kann auch dieser Winkel als derjenige definiert werden, den die zu $dv : du$ und $dv_1 : du_1$ konjugierten Richtungen auf der Fläche miteinander bilden. Gleichzeitig liefert der Ausdruck der rechten Seite auch den Kosinus des Winkels, den die sphärischen Bilder auf der *Gauß*schen Kugel einschließen.

Bezieht man die Fläche auf Hauptkreisparameter, so folgt aus der Theorie der geodätischen Parameter angewendet auf die *Gauß*sche Kugel sofort der Satz*):

Ist eine Fläche auf Hauptkreisparameter u, v bezogen, so daß das Quadrat ihres Winkelelements ist

$$d\varphi^2 = \mathfrak{E}\,du^2 + dv^2,$$

so ändert sich der Winkel α, den die kürzesten Abstände benachbarter Normalen längs einer beliebigen Hauptkreiskurve mit den kürzesten Abständen benachbarter Normalen der Hauptkreisparameter (u), da wo sie einander durchsetzen, bilden, gemäß der Formel

$$\frac{d\alpha}{du} = -\frac{\partial\sqrt{\mathfrak{E}}}{\partial v},$$

wo $\sqrt{\mathfrak{E}}$ im reellen Falle positiv ist und die Fortschreitungsrichtung der beliebigen Hauptkreiskurve im Sinne des wachsenden Parameters u festgelegt ist.

Der Satz kann z. B. auf Rotationsflächen angewendet werden; wenn diese durch die Gleichungen

$$x = p(u)\cos v;\ y = p(u)\sin v;\ z = q(u)$$

gegeben sind, so sind die Parameter $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ ein System von Hauptkreisparametern. Denn die Meridiankurven $v = \text{const.}$ sind Hauptkreiskurven und die Breitenkreise dazu die sphärischen Orthogonalkurven. Hier lauten die Formeln der allgemeinen Theorie

$$\frac{du}{dv} = \frac{\sqrt{\mathfrak{G}}}{\operatorname{tg}\alpha};\quad \frac{d\alpha}{dv} = \frac{-\partial\sqrt{\mathfrak{G}}}{\partial u};\quad \mathfrak{G} = q'^2.$$

Daher wird

$$\frac{dq'\sin\alpha}{dv} = q''\sin\alpha\,\frac{du}{dv} + q'\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{dv} = q'\,q''\cos\alpha - q''\,q'\cos\alpha = 0.$$

*) Vgl. z. B. *Scheffers*, a. a. O., II., S. 443.

Demnach ist auf Rotationsflächen für irgendeine Hauptkreiskurve:

$$q' \sin \alpha = \text{const.}$$

Endlich finden wir auch zu den geodätischen Polarkoordinaten hier eine Analogie. Läßt man nämlich eine Schar von ∞^1 Hauptkreiskurven von einem Flächenpunkte, etwa dem, in dem die z-Achse die Fläche durchdringt, ausgehen, so besitzt dieser Punkt den einen Pol der *Gauß*schen Kugel als sphärisches Bild. Die von dem festen Punkt ausgehenden Hauptkreiskurven haben als sphärische Bilder die Meridiane der Kugel und die Breitenkreise entsprechen den sphärischen Orthogonalkurven. Man erkennt die von *Bonnet* eingeführten Parameter: Meridiankurven und Kurven gleicher Polhöhe wieder*).

Genau wie auch die geodätischen Polarkoordinaten nur in einzelnen Fällen von Nutzen sind, lassen sich auch die Meridiankurven und Kurven gleicher Polhöhe nur bei einigen Problemen mit Vorteil verwenden. *Enneper* warnt mit Recht vor einer Überschätzung bei der Wahl dieser Kurven als Parameterlinien.

6. Über die Flächen, auf denen die Krümmungskurven zugleich Hauptkreiskurven sind.

Es sei $du = 0$ eine Schar der Krümmungskurven, die zugleich Hauptkreiskurven seien. Dagegen sei $dv = 0$ die zweite Schar der Krümmungskurven, ohne daß diese zugleich Hauptkreiskurven zu sein brauchen. Dann ist nach (4.) $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_u = 0$, also entweder

$$\mathfrak{G} = \frac{G}{R_2^2} = f(v),$$

worin $f(v)$ eine Funktion von v allein ist, oder $\mathfrak{G} = 0$.

Wenn $\mathfrak{G} = 0$ ist, so fallen die Krümmungskurven mit den Kreispunktpolarkurven zusammen. Diese Eigenschaft besitzen aber nur die Kugeln, auf denen jede Hauptkreiskurve zugleich Krümmungskurve aber nicht umgekehrt ist, und die abwickelbaren Flächen. Von beiden Fällen soll abgesehen werden.

---

*) *Bonnet*, Journal de Mathém., Sér. II, t. 5 (1860). — *Enneper*, Über Flächen mit besonderen Meridiankurven. Abhandlungen der K. Ges. d. Wiss., Göttingen, Bd. 21. 1882. — *R. v. Lilienthal*, Enzyklopädie der Math. Wissenschaften. III D 3 Nr. 41.

Dann folgt aus der Fundamentalgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{\mathfrak{G}} = \frac{1}{R_1 - R_2} \frac{\partial R_2}{\partial u},$$

daß $\frac{\partial R_2}{\partial u} = 0$ ist, also R_2 und G nur Funktionen von v allein sind.

Nun sind aber die Kurven $u = \text{const.}$ geodätische Kurven, wenn

$$FG_v - 2GF_v + GG_u = 0$$

ist. Diese Bedingung ist hier für alle Werte von v erfüllt. Daraus folgt der Satz:

Ist eine Schar von Krümmungskurven zugleich eine solche von Hauptkreiskurven, so ist sie auch eine Schar von geodätischen Kurven, also auch von ebenen Kurven der Fläche.

Umgekehrt erkennt man unmittelbar geometrisch, daß eine ebene geodätische Kurve, da Flächennormale und Kurvennormale zusammenfallen, einen Hauptkreis als sphärisches Bild besitzen muß, also zugleich Hauptkreiskurve ist.

Eine ebene geodätische Kurve ist zugleich Krümmungskurve und Hauptkreiskurve.

Demnach fällt die Frage nach den Flächen, auf denen eine oder beide Scharen von Krümmungskurven zugleich Hauptkreiskurven sind, zusammen mit der Frage nach den Flächen, auf denen eine oder zwei Scharen von je ∞^1 ebenen geodätischen Kurven vorhanden sind.

Ist dies für zwei Scharen der Fall, so folgt, da G und $\mathfrak{G}$ nur von v, dagegen E und $\mathfrak{E}$ nur von u abhängen, daß sich durch geeignete Wahl von Funktionen der Parameter die Linienelemente der Fläche bzw. der *Gauß*schen Kugel auf die Form bringen lassen:

$$ds^2 = du_1^2 + dv_1^2, \quad d\mathfrak{s}^2 = du_2^2 + dv_2^2,$$

d. h. *die Kurvensysteme sind isothermisch und äquidistant. Auch die Umkehrung ist,* wie unmittelbar ersichtlich, *richtig.*

7. Bestimmung aller Flächen, auf denen die Minimalkurven zugleich Hauptkreiskurven sind.

Da die Kreispunktpolarkurven zu den Hauptkreiskurven und die Minimalkurven zu den geodätischen Kurven zu rechnen sind, so können auf einer Fläche sämtliche Hauptkreiskurven nur dann mit sämtlichen geodätischen Kurven identisch sein, wenn die Kreispunktpolarkurven zu-

gleich geodätische Kurven und die Minimalkurven zugleich Hauptkreiskurven sind. Die erste Frage habe ich in einer anderen Arbeit*) erledigt. Dort ergab sich, daß auf jenen Flächen

$$\frac{R_2^2}{R_1 + R_2} = \text{const.}$$

sein muß. Es bleibt die zweite Frage zu beantworten.

Die Bestimmung der Flächen will ich nach einem schon in jener Arbeit angewendeten auf *R. v. Lilienthal* zurückgehenden Verfahren auch hier durchführen.

Eine beliebige Kurvenschar

$$A\,du + B\,dv = 0$$

ist eine Schar von Hauptkreiskurven, wenn die Bedingung erfüllt ist**)

$$(6.)\quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathfrak{F}B - \mathfrak{G}A}{\sqrt{\mathfrak{E}B^2 - 2\mathfrak{F}AB + \mathfrak{G}A^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathfrak{F}A - \mathfrak{E}B}{\sqrt{\mathfrak{E}B^2 - 2\mathfrak{F}AB + \mathfrak{G}A^2}} = 0.$$

Wählt man als Parameterlinien der Fläche die Krümmungskurven, setzt also $M = F = 0$, so werden die Fundamentalgrößen der *Gauß*schen Kugel:

$$\mathfrak{E} = \frac{L^2}{E} = \frac{E}{R_1^2};\quad \mathfrak{F} = 0;\quad \mathfrak{G} = \frac{N^2}{G} = \frac{G}{R_2^2}.$$

Danach nimmt (6.) die Form an

$$(7.)\quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{GR_1 A}{R_2\sqrt{EB^2R_2^2 + GA^2R_1^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{ER_2 B}{R_1\sqrt{EB^2R_2^2 + GA^2R_1^2}} = 0.$$

Sollen die beiden Scharen der Minimalkurven zugleich Hauptkreiskurven sein, so ist

$$\sqrt{E}\,du \pm i\sqrt{G}\,dv = 0$$

zu setzen. Dann wird aus (7.)

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{R_1\sqrt{G}}{R_2\sqrt{R_1^2 - R_2^2}} + \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{iR_2\sqrt{E}}{R_1\sqrt{R_1^2 - R_2^2}} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{R_1\sqrt{G}}{R_2\sqrt{R_1^2 - R_2^2}} - \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{iR_2\sqrt{E}}{R_1\sqrt{R_1^2 - R_2^2}} = 0. \end{cases}$$

Addiert und subtrahiert man beide Gleichungen, so folgt

$$\frac{R_1\sqrt{G}}{R_2\sqrt{R_1^2 - R_2^2}} = f_1(v);\quad \frac{R_2\sqrt{E}}{R_1\sqrt{R_1^2 - R_2^2}} = f_2(u),$$

*) Zur Theorie der Kreispunktpolarkurven. Dieses Journal, Bd. 137, 1910, S. 145 ff.

**) Vgl. z. B. *Bianchi*. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von *Lukat* (1899), S. 150.

wo $f_1(v)$ bezw. $f_2(u)$ Funktionen von v bezw. u allein bedeuten.

Eliminiert man $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ mit Hilfe der beiden Fundamentalgleichungen:

$$(9.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \dfrac{R_2}{R_1(R_2 - R_1)} \dfrac{\partial R_1}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \dfrac{R_1}{R_2(R_1 - R_2)} \dfrac{\partial R_2}{\partial u}, \end{cases}$$

so erhält man nach einfachen Umformungen

$$(9^a.)\qquad \frac{\partial}{\partial u} \frac{R_2(R_1 + R_2)}{R_1} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial v} \frac{R_1(R_1 + R_2)}{R_2} = 0.$$

Hier darf keiner der Krümmungsradien unendlich werden, das heißt die Fläche darf nicht abwickelbar sein. Auf abwickelbare Flächen wird noch zurückzukommen sein. Weiter sind die Flächen auszunehmen, auf denen $R_1^2 - R_2^2 = 0$ ist, d. h. Kugeln und Minimalflächen. In beiden Fällen sind die Minimalkurven identisch mit den Kreispunktpolarkurven, also auch Hauptkreiskurven.

Im allgemeinen erhält man

$$\frac{R_2(R_1 + R_2)}{R_1} = V; \quad \frac{R_1(R_1 + R_2)}{R_2} = U,$$

wo wieder V bzw. U Funktionen von v bzw. u allein bedeuten. Die Krümmungsradien werden

$$R_1 = U \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{U} + \sqrt{V}}; \quad R_2 = V \frac{\sqrt{U}}{\sqrt{U} + \sqrt{V}},$$

wofür man durch geeignete Wahl von Funktionen der Parameter schreiben kann

$$R_1 = \frac{u^2 v}{u + v}; \quad R_2 = \frac{v^2 u}{u + v}.$$

Wäre die Fläche eine *Weingarten*sche, so müßte, wie im nächsten Abschnitt gesondert gezeigt wird, eine der Funktionen U oder V konstant sein. In diesem Falle ist die hier durchgeführte Wahl der Parameter nicht zulässig. Deshalb sind zunächst *Weingarten*sche Flächen auszuschließen.

Weiter berechnet man mit Hilfe der Fundamentalgleichung E und G und findet

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{u}{v^2 - u^2} = \frac{\partial \log \sqrt{\dfrac{v - u}{v + u}}}{\partial v}; \quad \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{v}{u^2 - v^2} = \frac{\partial \log \sqrt{\dfrac{u - v}{v + u}}}{\partial u}.$$

Daraus folgt

$$(10.)\qquad \sqrt{E} = \varphi(u) \sqrt{\frac{v - u}{v + u}}; \quad \sqrt{G} = \psi(v) \sqrt{\frac{u - v}{u + v}},$$

wo $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ Funktionen von u und v allein bedeuten.

Diese Werte müssen noch die dritte Fundamentalgleichung

$$-\frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)$$

erfüllen. Setzt man noch

$$\frac{1}{\varphi^2} = U \quad \text{und} \quad \frac{1}{\psi^2} = V,$$

so erhält man durch zweimaliges Differenzieren nach u bzw. v in längerer Ausrechnung, die hier übergangen werden kann, für U und V die Bedingungsgleichungen

$$(11.) \quad \begin{cases} U''' u^5 - 3U'' u^4 + 3U' u^3 - 48 = 0, \\ V''' v^5 - 3V'' v^4 + 3V' v^3 - 48 = 0. \end{cases}$$

Das Ergebnis ist also:

Außer auf Kugeln und Minimalflächen sind die Minimalkurven zugleich Hauptkreiskurven auf den Flächen, deren Fundamentalgrößen sind

$$E = \frac{1}{U}\frac{v-u}{v+u}; \quad F = 0; \quad G = \frac{1}{V}\frac{u-v}{u+v};$$

$$L = \frac{1}{U}\frac{v-u}{u^2 v}; \quad M = 0; \quad N = \frac{1}{V}\frac{u-v}{v^2 u}.$$

Hier sind U und V Funktionen von u und v allein, die den Gleichungen genügen müssen

$$U''' u^5 - 3U'' u^4 + 3U' u^3 - 48 = 0,$$

$$V''' v^5 - 3V'' v^4 + 3V' v^3 - 48 = 0.$$

Abgesehen ist von abwickelbaren Flächen und von Weingartenschen Flächen.

8. Die *Weingarten*schen Flächen, auf denen die Minimalkurven zugleich Hauptkreiskurven sind.

Besteht zwischen R_1 und R_2 eine Relation, so ist

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial u} & \frac{\partial R_2}{\partial u} \\ \frac{\partial R_1}{\partial v} & \frac{\partial R_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Aus (9ª.) folgt

$$\frac{\partial R_2}{\partial u} = \frac{R_2^2}{R_1(R_1+2R_2)}\frac{\partial R_1}{\partial u}; \quad \frac{\partial R_1}{\partial v} = \frac{R_1^2}{R_2(R_2+2R_1)}\frac{\partial R_2}{\partial v},$$

so daß die Determinante den Wert erhält:

$$\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v}\frac{2(R_1+R_2)^2}{2(R_1+R_2)^2 + R_1 R_2} = 0.$$

Sieht man wieder von Minimalflächen ab, so muß entweder $\frac{\partial R_1}{\partial u} = 0$ oder $\frac{\partial R_2}{\partial v} = 0$ sein. Durch Vertauschung von u und v geht die eine Bedingung in die andere über. Wir setzen etwa $\frac{\partial R_2}{\partial v} = 0$, dann ist auch $\frac{\partial R_1}{\partial v} = 0$, so daß die Hauptkrümmungsradien nur Funktionen von u sind. Nach (9ª.) muß folglich

$$\frac{R_2(R_1 + R_2)}{R_1} = a = \text{const.}$$

sein.

Statt u werde, ohne die Parameterkurven zu ändern, der Hauptkrümmungsradius R_2 als neuer Parameter eingeführt und gleich τ gesetzt. Dann ist also

$$R_2 = \tau; \quad R_1 = \frac{\tau^2}{a - \tau}.$$

Nach der ersten Fundamentalgleichung ist $\sqrt{E} = U$, einer Funktion von u allein, während die zweite liefert

$$\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{2\tau - a}\frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{2\tau - a}$$

und folglich

$$\sqrt{G} = \sqrt{V}\,\sqrt{2\tau - a},$$

wo V eine Funktion von v allein ist.

Jetzt läßt sich nach der dritten Fundamentalgleichung noch E bestimmen. Man erhält nämlich

$$-\frac{a - \tau}{\tau^3} = \frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{2\tau - a}}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{2\tau - a}}\right).$$

Da auch E nur eine Funktion von τ ist, so kann man hierfür schreiben

$$d\left(\frac{a - 2\tau}{\tau^2}\right) = d\left(\frac{1}{E(2\tau - a)}\right),$$

woraus folgt

$$E = \frac{\tau^2}{(2\tau - a)(a - 2\tau + \alpha\tau^2)};$$

hier ist α die Integrationskonstante.

Das Linienelement der Fläche erhält, wenn man noch $V\,dv^2 = \pm\, dv_1^2$ setzt, die Form

$$(12.) \qquad ds^2 = \frac{\tau^2}{(2\tau - a)(\alpha\tau^2 - 2\tau + a)}\,d\tau^2 \pm (2\tau - a)\,dv_1^2.$$

Da E, G, R_1, R_2 und folglich auch L, N nur Funktionen von τ sind,

während zugleich $M = F = 0$ ist, so sind die fraglichen Flächen Rotationsflächen. Die Gleichung dieser Flächen soll noch ermittelt werden.

Eine Rotationsfläche sei gegeben durch die Gleichungen

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = p(u)$$

mit dem Linienelement

$$ds^2 = (1 + p'^2)\,du^2 + u^2\,dv^2.$$

Soll diese Fläche mit der oben gefundenen identisch sein, so folgt aus (12.)

$$u^2\,dv^2 = (2\tau - a)\,dv_1^2, \quad \text{oder einzeln}$$

$$(13.) \qquad dv^2 = \pm b\,dv_1^2, \quad 2\tau - a = b\,u^2,$$

wo b eine beliebige Konstante bedeutet. Demnach ist

$$(14.) \qquad u = \frac{\sqrt{2\tau - a}}{\sqrt{b}}; \quad \tau = \frac{b u^2 + a}{2}.$$

Weiter folgt durch Vergleich mit (12.)

$$(1 + p'^2)\,du^2 = \frac{\tau^2}{(2\tau - a)(a\tau^2 - 2\tau + a)}\,d\tau^2 \quad \text{oder}$$

$$1 + p'^2 = \frac{b\tau^2}{a\tau^2 - 2\tau + a},$$

$$(15.) \qquad p' = \sqrt{\frac{\tau^2(b - a) + 2\tau - a}{a\tau^2 - 2\tau + a}}.$$

Die drei Konstanten sind voneinander abhängig; man setze die gefundenen Werte in die Gleichung

$$R_2 = \frac{u\sqrt{1 + p'^2}}{p'}$$

ein. Dann erhält man

$$\tau^2(b - \alpha) = 0, \quad \text{d. h. es ist}$$

$b = \alpha$, so daß aus (15.) wird

$$p' = \sqrt{\frac{2\tau - a}{b\tau^2 - 2\tau + a}} \quad \text{und}$$

$$(15^a.) \qquad z = \int \sqrt{\frac{2\tau - a}{b\tau^2 - 2\tau + a}}\,du$$

oder endlich

$$(16.) \qquad z = \int \frac{d\tau}{\sqrt{b(b\tau^2 - 2\tau + a)}}.$$

Aus (15ª.) folgt, daß die Fläche für $2\tau - a = 0$, also für $u = 0$ einen kleinsten Parallelkreis besitzt. Die folgenden drei Fälle sind zu unterscheiden.

I. $ab-1=0$.

Es wird

$$z=\int\frac{d\tau}{b\tau-1}.$$

Ein größter Parallelkreis ergibt sich aus $b\tau^2-2\tau+a=0$ oder in diesem Falle $b\tau-1=0$; $\tau=\frac{1}{b}$. Man lege die (x,y)-Ebene durch den Punkt der z-Achse, in dem $\tau=\frac{a}{2}=\frac{1}{2b}$ ist. Es wird

$$z=\pm\int_{\frac{1}{2b}}^{\tau}\frac{d\tau}{b\tau-1}=\pm\frac{1}{b}\log[2(1-b\tau)]. \tag{17.}$$

Hierin ist noch $\tau=\frac{b^2(x^2+y^2)+1}{2b}$ zu setzen. Verfolgt man die Schnittkurve im positiven Viertel der (x,z)-Ebene, so sieht man, daß sie mit horizontalem Verlauf im Punkte $x=0$, $z=0$ beginnt und mit vertikaler Asymptote im Punkte $\tau=\frac{1}{b}$, also $x=\frac{1}{b}$, sich ins Unendliche erstreckt.

II. $ab-1>0$.

Ein größter Parallelkreis ist nicht vorhanden. Die (x,y)-Ebene werde genau so gelegt wie oben. Es wird

$$z=\int_{\frac{a}{2}}^{\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{b(b\tau^2-2\tau+a)}},$$

$$z=\pm\frac{1}{b}\log\frac{b\tau-1+\sqrt{b}\sqrt{b\tau^2-2\tau+a}}{ab-1}. \tag{18.}$$

Hierin ist für τ derselbe Wert wie oben zu setzen. Das Wurzelzeichen kann immer positiv vorausgesetzt werden. Da man (18.) auch so schreiben kann

$$z=\pm\frac{1}{b}\log\frac{(b\tau-1)+\sqrt{(b\tau-1)^2+(ab-1)}}{ab-1},$$

so ist in unserm Falle das Argument stets positiv, also für alle Werte von x ein reelles z vorhanden. Im positiven Viertel der (x,z)-Ebene erstreckt sich die Kurve wieder horizontal im Punkte $x=0$, $z=0$ beginnend ins Unendliche, für $x=\infty$ ist auch $z=\infty$.

III. $ab-1<0$.

Hier erhält man größte Parallelkreise für

$$\tau=\frac{1}{b}(1\pm\sqrt{1-ab}).$$

Legt man die (x, y)-Ebene diesmal durch solch einen größten Kreis, so erhält man

$$z = \int_{\frac{1}{b}(1 \pm \sqrt{1-ab})}^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{b(b\tau^2 - 2\tau + a)}},$$

$$(19.) \qquad z = \pm \frac{1}{b} \log \frac{b\tau - 1 + \sqrt{b(b\tau^2 - 2\tau + a)}}{\pm \sqrt{1-ab}}.$$

Die Formel kann man auch so schreiben

$$z = \pm \frac{1}{b} \log \frac{(b\tau - 1) + \sqrt{(b\tau-1)^2 - (1-ab)}}{\pm \sqrt{1-ab}};$$

daher gilt das positive Vorzeichen im Nenner, wenn $b\tau - 1 > 0$, das negative, wenn $b\tau - 1 < 0$ ist.

Bei positiven Vorzeichen beginnt im positiven Viertel der (x, z)-Ebene die Kurve senkrecht aufsteigend im Punkte

$$x = \frac{1}{b}\sqrt{2(1 + \sqrt{1-ab}) - ab}$$

und erstreckt sich mit wachsendem x ins Unendliche. Einen kleinsten Parallelkreis besitzt die Fläche nicht, da für $\tau = \frac{a}{2}$ der Ausdruck $b\tau - 1 = \frac{ab-2}{2} = \frac{-(1-ab)-1}{2} < 0$ wird.

Nimmt man dagegen das negative Vorzeichen, so beginnt jene Kurve zwar auch senkrecht aufsteigend im Punkte

$$x = \frac{1}{b}\sqrt{2(1 - \sqrt{1-ab}) - ab},$$

aber sie nähert sich mit abnehmendem x der z-Achse und endet in horizontalem Verlauf im Punkte $x = 0$. Die Rotationsfläche ist also im Endlichen geschlossen.

Also hat sich ergeben:

Neben der Kugel und den Minimalflächen, auf denen die Minimalkurven mit den Kreispunktpolarkurven zusammenfallen, sind die einzigen Weingartenschen Flächen, deren Minimalkurven zugleich Hauptkreiskurven sind, diejenigen Rotationsflächen, auf denen zwischen den Hauptkrümmungsradien die Beziehung besteht

$$\frac{R_2(R_1 + R_2)}{R_1} = \text{const.}$$

Ist $ab = 1$, *so kann man die Gleichung der Fläche auf die Form bringen*

$$z = \pm \frac{1}{b} \log [2(1 - b\tau)],$$

dagegen, wenn $ab > 1$ *ist, auf die Form*

$$z = \pm \frac{1}{b} \log \frac{b\tau - 1 + \sqrt{b(b\tau^2 - 2\tau + a)}}{ab - 1},$$

und wenn $ab < 1$ *ist, auf die Form*

$$z = \pm \frac{1}{b} \log \frac{b\tau - 1 + \sqrt{b(b\tau^2 - 2\tau + a)}}{\pm\sqrt{1 - ab}}.$$

Hier sind a *und* b *beliebige Konstanten, und es ist*

$$\tau = \frac{b(x^2 + y^2) + a}{2}$$

zu setzen.

Die Gleichung der Minimalkurven

$$\sqrt{E}\, d\tau \pm i\sqrt{G}\, dv_1 = 0$$

lautet auf diesen Flächen

$$\frac{\tau\sqrt{b}}{(2\tau - a)\sqrt{b\tau^2 - 2\tau + a}}\, d\tau \pm i\, dv = 0.$$

Durch Integration erhält man

$$\frac{1}{2} \log \frac{u^2(b^2u^2 + ab - 2 + b\sqrt{a^2 + 2u^2(ab-2) + b^2u^4})}{a^2b + (ab-2)bu^2 + ab\sqrt{a^2 + 2u^2(ab-2) + b^2u^4}} \pm iv = \text{const.}$$

9. Bestimmung aller Flächen, auf denen die geodätischen Kurven mit den Hauptkreiskurven identisch sind.

Der Fall, daß die geodätischen Kurven mit sämtlichen Hauptkreiskurven identisch sind, kann zunächst eintreten, wenn die Minimalkurven mit den Kreispunktpolarkurven zusammenfallen. Andernfalls müssen erstens die Kreispunktpolarkurven zugleich geodätische Kurven sein; dann aber ist, wie ich in der S. 186 zitierten Arbeit gezeigt habe, die Fläche eine *Weingarten*sche, auf der

$$(20^a.) \qquad \frac{R_2^2}{R_1 + R_2} = a = \text{const.}$$

ist. Zweitens müssen die Minimalkurven zugleich Hauptkreiskurven sein, eine Eigenschaft, die, wie oben gezeigt, nur denjenigen *Weingarten*schen Flächen zukommt, auf denen

$$(20^b.) \qquad \frac{R_2(R_1 + R_2)}{R_1} = b = \text{const.}$$

ist.

Auf der *Kugel* fallen die Minimalkurven mit den Kreispunktpolarkurven zusammen; außerdem sind nur noch die größten Kreise geodätische Kurven, aber auch zugleich Hauptkreiskurven. Daher erfüllt die Kugel die gestellte Bedingung.

Auf den Minimalflächen fallen ebenfalls die Minimalkurven mit den Kreispunktpolarkurven zusammen. Da

$$\mathfrak{E} = -KE \quad \text{und} \quad \mathfrak{G} = -KG$$

ist, so sind die Kurven $A\,du + B\,dv = 0$ Hauptkreiskurven, wenn

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{AG\sqrt{K}}{\sqrt{EB^2 + GA^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{BE\sqrt{K}}{\sqrt{EB^2 + GA^2}} = 0,$$

dagegen geodätische Kurven, wenn

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{AG}{\sqrt{EB^2 + GA^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{BE}{\sqrt{EB^2 + GA^2}} = 0$$

ist. Sollen beide Gleichungen zusammen bestehen, so folgt

$$AG\frac{\partial\sqrt{K}}{\partial u} + BE\frac{\partial\sqrt{K}}{\partial v} = 0.$$

Diese Gleichung soll für alle Wertepaare A, B erfüllt sein. Da nicht gleichzeitig $E = G = 0$ sein kann, — dann wäre ja die Fläche die abwickelbare Tangentenfläche einer Minimalkurve, die sicher keine Minimalfläche ist, — so muß $K = \text{const.}$ sein, d. h. beide Hauptkrümmungsradien sind konstant. Diese Eigenschaft besitzen nur Kugeln, Rotationszylinder und Ebenen, von denen aber nur die Ebenen Minimalflächen sind. In der Ebene ist jedoch jede Kurve eine Hauptkreiskurve, dagegen nur jede gerade Linie eine geodätische Kurve. Daher gibt es überhaupt keine Minimalflächen der verlangten Art.

Ausgenommen waren noch die abwickelbaren Flächen, von denen nach Abschnitt 2 sicherlich keine die gestellte Bedingung erfüllt.

Endlich bleibt noch die Möglichkeit, daß die Gleichungen (20^a.) und (20^b.) bestehen. Im allgemeinen sind dies zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten R_1 und R_2, deren Auflösung folglich konstante Werte für die Hauptkrümmungsradien liefert. Dieser Fall ist bereits erledigt. Es könnte aber auch die eine Gleichung identisch bestehen, wenn man einen Wert der Unbekannten aus der zweiten Gleichung einsetzt. Diese Substitution ergibt z. B.

$$R_2^2 - b\,R_2 + ab = 0.$$

Soll diese Gleichung für jedes R_2 identisch bestehen, so müßte $a = \infty$, $b = 0$ sein. Das führt auch nur auf die bereits erledigten Fälle zurück. Also ist das Ergebnis:

Die Kugel ist die einzige Fläche, auf der die sämtlichen Hauptkreiskurven zugleich geodätische Kurven sind.

Es sei noch bemerkt, daß unsere Frage identisch ist mit der Frage nach den Flächen, die sich geodätisch auf die Kugel abbilden lassen, wenn zugleich die Tangentialebenen entsprechender Punkte parallel sind.

10. Bestimmung aller Flächen, auf denen die Asymptotenkurven zugleich Hauptkreiskurven sind.

Genau wie oben sollen die Flächen bestimmt werden, auf denen die Asymptotenkurven zugleich Hauptkreiskurven sind. Da die Methode nichts Neues bietet, sollen hier nur die wichtigsten Ergebnisse mitgeteilt werden.

Sind wieder die Krümmungskurven Parameterlinien, ist also $M = F = 0$, so lautet die Gleichung der Asymptotenkurven

$$\sqrt{L}\,du \pm i\sqrt{N}\,dv = 0.$$

Diese sind Hauptkreiskurven, wenn

$$\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\sqrt{R_1 N}}{\sqrt{R_2}\sqrt{R_1 - R_2}} \pm \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{i\sqrt{R_2 L}}{\sqrt{R_1}\sqrt{R_1 - R_2}} = 0$$

ist. Von abwickelbaren Flächen muß abgesehen werden; auf diesen fallen die geradlinigen Erzeugenden mit den Asymptotenkurven und den Kreispunktpolarkurven zusammen, genügen also der Aufgabe.

Da $L = \frac{E}{R_1}$ und $N = \frac{G}{R_2}$ ist, so folgt durch Addition bzw. Subtraktion:

$$\frac{\sqrt{R_1 G}}{R_2\sqrt{R_1 - R_2}} = f_1(v); \quad \frac{\sqrt{R_2 E}}{R_1\sqrt{R_2 - R_1}} = f_2(u).$$

Mit Benutzung der Fundamentalgleichungen erhält man hieraus

$$\frac{R_2^3}{R_1} = V; \quad \frac{R_1^3}{R_2} = U, \quad \text{und folglich}$$

$$R_2 = \sqrt[8]{V^3 \cdot U}, \quad R_1 = \sqrt[8]{V \cdot U^3}.$$

Wieder kann man neue Parameter, ohne die Parameterlinien zu ändern, einführen, so daß

$$R_1 = u^3 v, \quad R_2 = u v^3 \tag{21.}$$

wird. Weiter erhält man aus den Fundamentalgleichungen

(22.) $$\sqrt{E} = \varphi(u)\sqrt{v^2 - u^2};\quad \sqrt{G} = \psi(v)\sqrt{u^2 - v^2}.$$

Diese Werte müssen auch die dritte Fundamentalgleichung erfüllen. Setzt man sie ein und differenziert zweimal nach u bzw. v, so bleibt

$$U''' u^7 + 3U'' u^6 - 3U' u^5 - 48 = 0,$$
$$V''' v^7 + 3V'' v^6 - 3V' v^5 - 48 = 0,$$

wo $U = -\frac{1}{\varphi^2}$ und $V = -\frac{1}{\psi^2}$ gesetzt ist.

Danach ist das Ergebnis:

Außer auf abwickelbaren Flächen sind die Asymptotenkurven zugleich Hauptkreiskurven auf denjenigen Flächen, deren Fundamentalgrößen sind

$$E = \frac{1}{U}(u^2 - v^2);\quad F = 0;\quad G = \frac{1}{V}(v^2 - u^2);$$
$$L = \frac{1}{U}\frac{(u^2 - v^2)}{u^3 v};\quad M = 0;\quad N = \frac{1}{V}\frac{v^2 - u^2}{v^3 u}.$$

Hier sind U und V Funktionen von u bzw. v allein, die den Gleichungen genügen müssen

$$U''' u^7 + 3U'' u^6 - 3U' u^5 - 48 = 0,$$
$$V''' v^7 + 3V'' v^6 - 3V' v^5 - 48 = 0.$$

Abgesehen ist von Weingartenschen Flächen.

11. Bestimmung aller *Weingarten*schen Flächen, auf denen die Asymptotenkurven zugleich Hauptkreiskurven sind.

Soll ein Krümmungsradius eine Funktion des andern sein, so muß die Funktionaldeterminante verschwinden:

$$\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v} - \frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial R_2}{\partial u} = 0.$$

In unserm Falle ist aber

$$\frac{\partial R_2}{\partial u} = \frac{R_2}{3R_1}\frac{\partial R_1}{\partial u};\quad \frac{\partial R_1}{\partial v} = \frac{R_1}{3R_2}\frac{\partial R_2}{\partial v},\quad \text{so daß}$$
$$\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v} = 0 \text{ sein muß.}$$

Also ist entweder $\frac{\partial R_1}{\partial u} = 0$ oder $\frac{\partial R_2}{\partial v} = 0$. Durch Vertauschung von u und v geht die eine Annahme in die andere über, so daß es genügt, die eine weiterzuverfolgen. Ich setze

$$\frac{\partial R_2}{\partial v} = 0;\quad R_2 = f(u),$$

d. h. gleich einer Funktion von u allein. Unmittelbar folgt, daß auch R_1 eine Funktion von u allein sein muß, und daß demnach

$$\frac{R_2^3}{R_1} = \frac{1}{a} = \text{const.}$$

ist.

Als neuer Parameter werde der zweite Krümmungsradius selbst benutzt und zur Abkürzung gesetzt

$$R_2 = \tau; \quad R_1 = a\tau^3;$$

dann liefert die zweite Fundamentalgleichung

$$\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\partial \log \sqrt{a\tau^2 - 1}}{\partial u},$$

d. h.

$$\sqrt{G} = \sqrt{V}\sqrt{a\tau^2 - 1},$$

wo V eine Funktion von v allein ist.

Aus der dritten Fundamentalgleichung folgt jetzt

$$d\left(\frac{1}{\tau^2}\right) = d\left(\frac{a\tau}{\sqrt{E}\sqrt{a\tau^2 - 1}}\right)^2,$$

also

$$E = \frac{a\tau^4}{(a\tau^2 + 1)(a\tau^2 - 1)}.$$

Hierin ist α die Integrationskonstante.

Das Linienelement der Fläche hat die Form:

$$(23.) \qquad ds^2 = \frac{a^2\tau^4}{(a\tau^2 + 1)(a\tau^2 - 1)}\, d\tau^2 \pm (a\tau^2 - 1)\, dv_1^2,$$

wenn $V\, dv^2 = \pm\, dv_1^2$ gesetzt wird.

Die Fläche ist eine Rotationsfläche, da E, G, R_1, R_2 und demnach auch L und N Funktionen von τ allein sind, während $M = F = 0$ ist.

Wieder sei die Rotationsfläche durch die Gleichungen

$$x = u\, \cos v; \quad y = u\, \sin v; \quad z = p(u)$$

gegeben mit dem Linienelement

$$(24.) \qquad ds^2 = (1 + p'^2)\, du^2 + u^2\, dv^2.$$

Vergleicht man mit (23.), so folgt

$$u^2\, dv^2 = \pm\, (a\tau^2 - 1)\, dv_1^2;$$

$$dv^2 = \pm\, b\, dv_1^2; \quad bu^2 = a\tau^2 - 1;$$

$$(25.) \qquad u = \sqrt{\frac{a\tau^2 - 1}{b}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{bu^2 + 1}{a}},$$

wo b irgendeine Konstante bedeutet.

Weiter liefert der Vergleich von (23.) und (24.)

$$(1 + p'^2)\,du^2 = \frac{a^2\tau^4}{(a\tau^2+1)(a\tau^2-1)}\,d\tau^2$$

oder

$$p'^2 = \frac{(b-a)\tau^2-1}{a\tau^2+1}.$$

Um die zwischen den drei Konstanten bestehende Beziehung zu ermitteln, setzt man die gefundenen Werte in die Gleichung

$$R_2 = \frac{u\sqrt{1+p'^2}}{p'}$$

ein und erhält

$$a = b - a.$$

Demnach wird schließlich

$$z = \int \frac{a\tau\,d\tau}{\sqrt{b[(b-a)\tau^2+1]}}.$$

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. $b - a = 0$.

Man lege die (x, y)-Ebene durch den Punkt der z-Achse, in dem $\tau = \sqrt{\frac{1}{a}}$, $u = 0$ ist; dann ist

$$z = \int_{\sqrt{\frac{1}{a}}}^{\tau} \frac{a\tau}{\sqrt{b}}\,d\tau,$$

$$z = \frac{a\tau^2}{2\sqrt{b}} - \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{2}(x^2+y^2).$$

Die Fläche ist ein Rotationsparaboloid.

II. $b - a \gtrless 0$.

Man lege die (x, y)-Ebene durch den Punkt der z-Achse, in dem $\tau = \sqrt{\frac{1}{a-b}}$, $u = \sqrt{\frac{1}{a-b}}$ ist; dann ist

$$z = \int_{\sqrt{\frac{1}{a-b}}}^{\tau} \frac{a\tau}{\sqrt{b[(b-a)\tau^2+1]}}\,d\tau, \quad z = \frac{a}{\sqrt{b}}\,\frac{\sqrt{(b-a)\tau^2+1}}{a-b},$$

$$z^2 + \frac{a}{a-b}(x^2+y^2) = \frac{a}{(a-b)^2}.$$

Gibt man a und $(a-b)$ positive und negative Vorzeichen, so erhält man die übrigen Rotationsflächen zweiten Grades.

Es hat sich also ergeben*):

Die einzigen Weingartenschen Flächen, auf denen die Asymptotenkurven zugleich Hauptkreiskurven sind, sind die Rotationsflächen zweiten Grades.

Die Gleichung der Asymptotenkurven selbst wird auf diesen Flächen

$$\frac{\sqrt{ab}\,\tau\,d\tau}{(a\tau^2-1)\sqrt{(b-a)\tau^2+1}} \pm i\,dv = 0,$$

wofür man durch Integration erhält:

$$\frac{1}{2}\log\frac{(b-a)u^2}{(b-a)u^2+2} \pm iv = \text{const.}$$

12. Über die Abbildung von Flächen aufeinander, bei der Hauptkreiskurven in Hauptkreiskurven übergehen.

Wieder soll, wie immer, von den Tangentenflächen der Minimalkurven abgesehen werden. Dann kann man zwei Flächen so aufeinander abbilden, daß den Hauptkreiskurven der einen Fläche die der andern entsprechen. Dabei kann der Fall eintreten, daß nur einer Schar der Kreispunktpolarkurven der einen Fläche eine Schar derselben Kurven auf der andern Fläche entspricht. Das soll zunächst einmal ausgeschlossen sein. Es sollen also entweder beide oder keine Scharen dieser Kurven einander entsprechen. Dann kann man auf den zugeordneten Flächen als Parameterkurven zwei Scharen wählen, deren sphärische Bilder beide zugleich orthogonal sind**). Werden die Fundamentalgrößen der *Gauß*schen Kugel mit $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ bzw. $\bar{\mathfrak{E}}, \bar{\mathfrak{F}}, \bar{\mathfrak{G}}$ bezeichnet, so wäre also $\mathfrak{F} = \bar{\mathfrak{F}} = 0$ zu setzen, und die Winkelelemente der Flächen erhalten die Form:

$$d\varphi^2 = \mathfrak{E}\,du^2 + \mathfrak{G}\,dv^2, \quad d\bar{\varphi}^2 = \bar{\mathfrak{E}}\,du^2 + \bar{\mathfrak{G}}\,dv^2.$$

Jetzt erhält man für unsere Abbildung genau die entsprechenden Ergebnisse, wie sie für die geodätische Abbildung bekannt sind***).

Aus der Identität der beiden Gleichungen für die Hauptkreiskurven, deren eine, wenn u und v als Funktionen eines Parameters t aufgefaßt werden, lautet

---

*) Daß die sphärische Abbildung einer Schar von Asymptotenkurven auf Regelflächen eine Schar größter Kreise ist, zeigte schon *Lelieuvre*, „Sur les lignes asymptotiques et leur représentation sphérique"; Bulletin des sciences mathématiques, 2. XII. 1888. Dort wird übrigens auch auf *Koenigs* verwiesen.

**) Vgl. meine Diss. über Kreispunktpolarkurven. Kiel 1908. S. 14.

***) Man vgl. z. B. *Scheffers*, a. a. O. II, S. 417 ff.

$$(26.)\quad \begin{cases} 2(u'v''-u''v')-\dfrac{\mathfrak{E}_v}{\mathfrak{G}}u'^3+\left(2\dfrac{\mathfrak{G}_u}{\mathfrak{G}}-\dfrac{\mathfrak{E}_u}{\mathfrak{E}}\right)u'^2v' \\ \quad+\left(\dfrac{\mathfrak{G}_v}{\mathfrak{G}}-2\dfrac{\mathfrak{E}_v}{\mathfrak{E}}\right)u'v'^2+\dfrac{\mathfrak{G}_u}{\mathfrak{E}}v'^3=0, \end{cases}$$

während in der zweiten die überstrichenen Fundamentalgrößen zu setzen sind, folgt unmittelbar

$$2\frac{\mathfrak{G}_u}{\mathfrak{G}}-\frac{\mathfrak{E}_u}{\mathfrak{E}}=2\frac{\overline{\mathfrak{G}}_u}{\overline{\mathfrak{G}}}-\frac{\overline{\mathfrak{E}}_u}{\overline{\mathfrak{E}}},$$

$$\frac{\mathfrak{G}_v}{\mathfrak{G}}-2\frac{\mathfrak{E}_v}{\mathfrak{E}}=\frac{\overline{\mathfrak{G}}_v}{\overline{\mathfrak{G}}}-2\frac{\overline{\mathfrak{E}}_v}{\overline{\mathfrak{E}}},$$

$$\frac{\mathfrak{G}_u}{\mathfrak{E}}=\frac{\overline{\mathfrak{G}}_u}{\overline{\mathfrak{E}}};\quad \frac{\mathfrak{E}_v}{\mathfrak{G}}=\frac{\overline{\mathfrak{E}}_v}{\overline{\mathfrak{G}}}.$$

Bei der einfachen Umrechnung dieser Gleichungen hat man zwei Funktionen U und V von u bzw. v allein einzuführen. Der Fall $U=0$ oder $V=0$ ist auszuschließen. Dann wäre nämlich $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{G}$ gleich Null, d. h. die Fläche entweder abwickelbar oder Tangentenfläche einer Minimalkurve.

Ebenso soll einstweilen die Beziehung $U-V=0$ oder $U=V=\text{const.}$ unberücksichtigt bleiben; darauf wird weiter unten zurückgekommen werden.

Dann erhalten die Fundamentalgrößen die Werte

$$\mathfrak{E}=\mu(u)(U-V);\quad \overline{\mathfrak{E}}=\frac{\mu(u)}{U^2V}(U-V),$$

$$\mathfrak{G}=\lambda(v)(U-V);\quad \overline{\mathfrak{G}}=\frac{\lambda(v)}{UV^2}(U-V),$$

so daß die Winkelelemente im allgemeinen Fall die Form besitzen

$$d\varphi^2=(U-V)(\mu(u)\,du^2+\lambda(v)\,dv^2),$$

$$d\overline{\varphi}^2=\left(\frac{1}{V}-\frac{1}{U}\right)\left(\frac{\mu(u)}{U}\,du^2+\frac{\lambda(v)}{V}\,dv^2\right).$$

Setzt man $\sqrt{\mu(u)}\,du=du_1$ und $\sqrt{\lambda(v)}\,dv=dv_1$ und schreibt noch $-V$ statt V, so erhält man

$$d\varphi^2=(U+V)(du_1^2+dv_1^2),$$

$$d\overline{\varphi}^2=-\left(\frac{1}{U}+\frac{1}{V}\right)\left(\frac{du_1^2}{U}-\frac{dv_1^2}{V}\right).$$

Übrigens läßt sich auch $d\overline{\varphi}^2$ auf dieselbe Form bringen wie $d\varphi^2$; man braucht nur

$$\sqrt{\frac{\mu(u)}{U}}\,du=du_1;\quad \sqrt{\frac{\lambda(v)}{V}}\,dv=dv_1$$

zu setzen. Dann folgt zunächst

$$d\bar{\varphi}^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)(du_1^2 + dv_1^2).$$

Hierin setzt man weiter

$$\frac{1}{V} = V_1 \text{ und } \frac{1}{U} = -U_1$$

und erhält so die verlangte Form

$$d\bar{\varphi}^2 = (U_1 + V_1)(du_1^2 + dv_1^2).$$

Man kann demnach diese Form des Winkelelements als charakteristisch für die gefundenen Flächen ansehen.

Ist dagegen $U = V = \text{const.}$, so wird

$$\mathfrak{E} = a^2\bar{\mathfrak{E}} \text{ und } \mathfrak{G} = a^2\bar{\mathfrak{G}},$$

also auch

$$d\varphi^2 = a^2 d\bar{\varphi}^2.$$

Hierin ist a irgendeine Konstante.

Das Ergebnis läßt sich so zusammenfassen:

Sollen zwei Flächen so aufeinander abgebildet werden, daß den Hauptkreiskurven der einen die Hauptkreiskurven der andern entsprechen, und bildet sich dabei nicht etwa nur eine Schar der Kreispunktpolarkurven der einen Fläche wieder als eine solche der andern Fläche ab, so sind zwei Fälle möglich:

1. *Die Winkelelemente unterscheiden sich nur durch eine Konstante*

$$d\varphi = a\, d\bar{\varphi};$$

2. *Die Winkelelemente können zugleich auf die Formen gebracht werden*

$$(27.) \qquad \begin{cases} d\varphi^2 = (U + V)(du^2 + dv^2), \\ d\bar{\varphi}^2 = -\left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V}\right)\left(\frac{du^2}{U} - \frac{dv^2}{V}\right). \end{cases}$$

U und V sind Funktionen von u bzw. v allein. Abgesehen ist von abwickelbaren Flächen.

Im zweiten Falle läßt sich die Gleichung der Hauptkreiskurven leicht in endlicher Form angeben. Sie lautet zunächst

$$(U'v' - V'u')(u'^2 + v'^2) + 2(U + V)(u'v'' - v'u'') = 0.$$

Durch einfache Umformungen*) erhält sie die Form

$$\int \frac{du}{\sqrt{U - a}} - \int \frac{dv}{\sqrt{V + a}} = b,$$

wo a und b beliebige Konstanten bedeuten.

---

*) Vgl. *Scheffers*, a. a. O., II, S. 423.

Als Beispiel seien auch hier die Rotationsflächen erwähnt. Ihre Gleichungen seien

$$x = p(u)\cos v\,; \quad y = p(u)\sin v; \quad z = q(u),$$

dann sind die Fundamentalgrößen der *Gauß*schen Kugel

$$\mathfrak{E} = \frac{p''^2}{q'^2}\,; \quad \mathfrak{F} = 0; \quad \mathfrak{G} = q'^2,$$

und das Winkelelement wird

$$d\varphi^2 = \frac{p''^2}{q'^2}\,du^2 + q'^2\,dv^2.$$

Setzt man

$$\frac{p''^2}{q'^2}\,du^2 = q'^2\,du_1^2,$$

so wird daraus

$$d\varphi^2 = q'^2(du_1^2 + dv^2).$$

Hier ist also

$$U = q'^2; \quad V = 0,$$

und die Gleichung der Hauptkreiskurven lautet

$$\int \frac{du_1}{\sqrt{q'^2 - a}} - \int \frac{dv}{\sqrt{a}} = b$$

oder, wenn man noch für du_1 seinen Wert setzt,

$$\int \frac{p''\,du}{q'^2\sqrt{q'^2 - a}} - \frac{v}{\sqrt{a}} = b.$$

Diese Gleichung stimmt aber bis auf die Bezeichnungen mit der auf S. 181 gefundenen überein, so daß das Resultat wird:

$$\operatorname{tg}^2(v - a_1) = \frac{1 - q'^2}{b_1 q'^2 - 1},$$

wo $a_1 = -\sqrt{a}\,b$ und $\frac{1}{a} = b_1$ gesetzt ist.

13. Spezieller Fall der Abbildung zweier Flächen aufeinander mit gleichem Winkelelement.

Als einfaches Beispiel zu den soeben erwähnten Abbildungen mögen zwei Flächen betrachtet werden, welche die gleichen Fundamentalgrößen der *Gauß*schen Kugel besitzen, mit anderen Worten also auch dieselbe sphärische Abbildung. Hier ist

$$\mathfrak{E} = \bar{\mathfrak{E}}; \quad \mathfrak{F} = \bar{\mathfrak{F}}; \quad \mathfrak{G} = \bar{\mathfrak{G}}.$$

In einfachster Weise ist diese Bedingung zu erfüllen, wenn

$$\frac{\bar{E}}{E} = \frac{\bar{F}}{F} = \frac{\bar{G}}{G} \quad \text{und} \quad \frac{\bar{L}}{L} = \frac{\bar{M}}{M} = \frac{\bar{N}}{N}$$

gesetzt wird. Dieser Fall läßt sich sofort erledigen. Die Abbildung ist nach *Stäckel**) konform-konjunktiv.

Es sei

$$\bar{E} = \lambda E; \quad \bar{F} = \lambda F; \quad \bar{G} = \lambda G;$$
$$\bar{L} = \sigma L; \quad \bar{M} = \sigma M; \quad \bar{N} = \sigma N;$$

dann folgt aus $\bar{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}$ unmittelbar

$$\lambda = \sigma^2.$$

Da die Krümmungskurven beider Flächen einander entsprechen, so können sie als Parameterkurven gewählt werden. In diesem Falle ist

$$\bar{R}_1 = \frac{\bar{E}}{\bar{L}} = \sigma R_1 \text{ und } \bar{R}_2 = \sigma R_2.$$

Drückt man aus, daß auf beiden Flächen die Fundamentalgleichungen gelten müssen, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{R_1} = \frac{1}{\sigma(R_2 - R_1)}\frac{\partial \sigma R_1}{\partial v} = \frac{1}{(R_2 - R_1)}\frac{\partial R_1}{\partial v} + \frac{R_1}{R_2 - R_1}\frac{\partial \sigma}{\partial v},$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{R_2} = \frac{1}{R_1 - R_2}\frac{\partial R_2}{\partial u} + \frac{R_2}{R_1 - R_2}\frac{\partial \sigma}{\partial u},$$

und mit Berücksichtigung der gegebenen Fläche

$$\frac{R_1}{R_2 - R_1}\frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0, \qquad \frac{R_2}{R_1 - R_2}\frac{\partial \sigma}{\partial u} = 0.$$

Den Gleichungen kann zunächst durch $\sigma = \text{const.}$ genügt werden. Die Abbildung ist eine einfache Ähnlichkeitstransformation, bei der entsprechende Punkte u, v ineinander übergehen.

Außerdem kann auch noch einer der Krümmungsradien Null oder unendlich sein.

Ist $R_1 = 0$ aber $R_2 \neq 0$, so ist auch $E = \bar{E} = 0$ und folglich $EG - F^2 = 0$ und $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = 0$. Beide Flächen sind die abwickelbaren Tangentenflächen von Minimalkurven, bei denen von sphärischer Abbildung nicht gesprochen werden kann. Dasselbe gilt von den Nullkugeln, auf denen $R_1 = R_2 = 0$ und zugleich $\bar{R}_1 = \bar{R}_2 = 0$ wäre.

Ist $R_1 = \infty$ aber $R_2 \neq \infty$, so ist auch $\bar{R}_1 = \infty$. Weiter muß $L = \bar{L} = 0$ und folglich $\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2 = 0$ und $LN - M^2 = 0$ sein. Beide Flächen sind abwickelbar. Hier bleibt

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0,$$

---

*) *P. Stäckel*, Beiträge zur Flächentheorie II. Berichte d. math.-phys. Kl. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig. Bd. 48. (1896.)

d. h. σ ist eine Funktion $\sigma(u)$ von u allein. Umgekehrt würde $R_2 = \infty$ und $R_1 \neq \infty$ ergeben, daß σ eine Funktion von v allein wäre.

Sind beide Krümmungsradien unendlich, so ergeben sich Ebenen, die aber immer dasselbe sphärische Bild besitzen.

Sollen zwei Flächen konform-konjunktiv aufeinander abgebildet werden, so daß sie dieselben sphärischen Bilder besitzen, so wird diese Abbildung im allgemeinen durch eine Ähnlichkeitstransformation vermittelt, bei der entsprechende Punkte u, v ineinander übergehen. Eine Ausnahme bilden die abwickelbaren Flächen. Sind diese auf Krümmungskurven als Parameterlinien bezogen und ist der zu den Kurven $v =$ const. gehörige Krümmungsradius unendlich, so wird die Abbildung vermittelt durch die Gleichungen

$$\bar{E} = \sigma^2(u)\,E; \quad \bar{G} = \sigma^2(u)\,G; \quad \bar{N} = \sigma(u)\,N,$$

wo $\sigma(u)$ eine beliebige Funktion von u allein bedeutet.

14. Schlußwort.

Die Flächen, deren Winkelelement die Form der Gleichung (27.) hat, verdienen eine eingehende Behandlung, die in einer weiteren Arbeit durchgeführt werden soll. Ebenso sollen die Abbildungen der Nr. 12 weiter untersucht werden.

Zugleich bieten sich die allgemeineren Fragen dar nach den Strahlen einer Kongruenz, deren sphärische Bilder Hauptkreise der *Gauß*schen Kugel sind. Im Anschluß an die neueren Arbeiten von *G. Sannia**) dürfte die Behandlung dieses Problems keine Schwierigkeiten machen.

In anderer Beziehung führt das Normalenproblem einer Fläche zu der folgenden Fragestellung. Gibt es Flächen und welche Eigenschaften besitzen sie, die durch eine starre Kurve so erzeugt werden, daß die Flächennormalen längs der starren Kurve konstante Drehungen ausführen? Ein triviales Beispiel ist ein Zylinder, den man durch eine gerade Linie erzeugt. Die Flächen bilden eine gewisse Analogie zu den Translationsflächen. Auch diese Untersuchungen sollen an anderer Stelle erledigt werden.

Endlich dürfte auch die Untersuchung der Abbildung zweier Flächen aufeinander, bei der Hauptkreiskurven in geodätische Linien übergehen, interessante Ergebnisse liefern.

---

*) *G. Sannia*, Geometria differenziale delle congruenze rettilinee. Mathem. Annalen Bd. 68, S. 409 ff. Daselbst auch weitere Literaturangabe.

Über Reihenentwicklungen, welche aus speziellen Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichungen entspringen.

Von Herrn *Emil Hilb* in Würzburg.

Während die Reihenentwicklungen nach den Eigenfunktionen symmetrischer, reeller Kerne in den letzten Jahren in Anschluß an die grundlegenden Arbeiten von *Hilbert* und *E. Schmidt* nach den verschiedensten Richtungen hin untersucht wurden, hat man die Reihenentwicklungen, die zu unsymmetrischen oder komplexen Kernen gehören, fast völlig vernachlässigt. Tatsächlich bedarf es bei letzteren Spezialuntersuchungen, da die beiden grundlegenden Theoreme, welche Konvergenz und die wirkliche Darstellung der zu entwickelnden Funktion sichern, wesentlich darauf beruhen, daß der Kern symmetrisch und reell ist. Aber dennoch lassen sich die Integralgleichungen auch für Probleme der gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche auf *komplexe* oder *unsymmetrische* Kerne führen, mit Vorteil verwenden, um so mehr, als sich in Anschluß an die Untersuchungen von *Kneser**) die tieferliegenden Konvergenzfragen, welche bei stärkerer Einschränkung der Voraussetzungen über die zu entwickelnden Funktionen auftreten, damit auch erledigen lassen. So habe ich in einer Arbeit**) gezeigt, wie sich die Integralgleichungen für die Reihenentwicklungen nach den Eigenfunktionen gewisser komplexer linearer Differentialgleichungen verwerten lassen, welche in der theoretischen Physik auftreten. Die a. a. O. gegebene Methode verwende ich jetzt zur Behandlung der beiden folgenden Probleme:

*) Math. Ann., Bd. 60, 63.

**) Math. Ann., Bd. 71.

1. Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$\frac{du}{dx} + \lambda u = K(x).$$

Man bestimme die Werte von λ, für welche eine Lösung $u(\lambda, x)$ für $x = 0$ und $x = 1$ vorgegebene Werte annimmt und es sei $v(\lambda, x)$ eine Lösung von

$$\frac{dv(x)}{dx} - \lambda v = 0;$$

dann ist:

$$\int_0^1 v(\lambda_i, x)\, u(\lambda_j, x)\, dx = 0 \quad \text{oder} \quad \neq 0,$$

je nachdem λ_i und λ_j verschiedene oder gleiche Eigenwerte sind. Man erhält durch diese Problemstellung die Frage nach der Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den $u(\lambda_i, x)$ oder nach den $v(\lambda_i, x)$.

2. Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$L(u) + \lambda^2 u = \frac{d^2u}{dx^2} + (\lambda^2 + q(x))\, u = K(x).$$

Man bestimme λ so, daß eine Lösung $u(\lambda^2, x)$ existiert, welche nebst ihrer ersten Ableitung für $x = 0$ gegebene Werte annimmt, für welche überdies in $x = 1$ eine gegebene lineare homogene oder nichthomogene Relation zwischen Funktion und Ableitung besteht, so daß also etwa

$$h_1 u'(\lambda^2, 1) - h_2 u(\lambda^2, 1) = \gamma.$$

Als entsprechende Funktion $v(\lambda^2, x)$ ist dann eine solche Lösung derselben Differentialgleichung zu wählen, welche in $x = 1$ den Wert h_1, deren Ableitung daselbst den Wert h_2 besitzt, bezüglich eine dazu proportionale Lösung.

Um diese beiden Probleme zu behandeln, stelle ich zunächst in jedem die *Green*sche Funktion für beliebige Werte von λ dar und leite aus dem *Cauchy*schen Satz ihre Partialbruchzerlegung her. Daraus ergeben sich dann leicht die Entwicklungstheoreme für zweimal stetig differenzierbare Funktionen, welche gewissen Randbedingungen genügen. Will man diese Bedingungen vereinfachen, so sind die Fälle, in denen einige von den gegebenen Konstanten Null sind, besonders zu betrachten; tatsächlich ist bei diesen die Verteilung der Eigenwerte eine ganz andere. Es werden in engem Anschluß an die erwähnte Arbeit von *Kneser* die Modifikationen der Entwicklungen untersucht, welche eintreten, wenn wir von den Randbedingungen bei den zu entwickelnden Funktionen ab-

sehen und nur voraussetzen, daß sie stückweise zweimal stetig differenzierbar sind.

Weitere Einschränkungen ließen sich bei einem Teile der Entwicklungen ebenfalls im Anschluß an *Kneser* machen, doch wird dies nicht durchgeführt.

Es soll noch besonders hervorgehoben werden, daß die Reihenentwicklungen des Falles III in Kap. I sich bei *Herglotz**) in nur wenig veränderter Fassung finden, aber dort in ganz anderem Zusammenhang und von ganz anderem Standpunkte aus behandelt sind.

Kap. I. Differentialgleichungen 1. Ordnung.

§ 1. Aufstellung der *Green*schen Funktion.

Es sei $p(x)$ eine im Intervalle 0 bis 1 von 0 stets verschiedene zweimal stetig differenzierbare Funktion, $q(x)$ und $K(x)$ besitzen in diesem Intervalle eine stetige erste Ableitung von beschränkter Schwankung, wobei jedoch bemerkt sein soll, daß wir in den meisten Fällen im folgenden mit der Annahme durchkommen könnten, daß $K(x)$ bzw. die später in (13^b.) zu definierende Funktion $\bar{K}(x)$ im Intervalle von 0 bis 1 von beschränkter Schwankung ist; λ und λ_1 sind Parameter. Wir betrachten die beiden Differentialausdrücke:

$$(1.) \qquad L(u) = p(x)\frac{d}{dx}u(x) + q(x)u(x),$$

$$(2.) \qquad \Lambda(v) = \frac{d}{dx}(p(x)v(x)) - q(x)v(x).$$

Dann erhält man durch partielle Integration die Identität:

$$(3.) \qquad \int_a^b (vL(u) + u\Lambda(v))\,dx = [p(x)u(x)v(x)]_a^b.$$

Es sei jetzt $u(\lambda, x)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(4.) \qquad L(u) + \lambda u = K(x),$$

$v(\lambda, x)$ eine solche von

$$(5.) \qquad \Lambda(v) - \lambda v = 0,$$

dann folgt aus (3.)

$$(6.) \qquad u(\lambda, x)p(x) = \frac{1}{v(\lambda, x)}\int_0^x K(z)v(\lambda, z)\,dz + \frac{p(0)v(\lambda, 0)u(\lambda, 0)}{v(\lambda, x)}.$$

$v(\lambda_1, x)$ sei eine Lösung derjenigen Differentialgleichung, welche aus (5.)

*) Integralgleichungen der Elektronentheorie. Math. Annalen 65.

entsteht, wenn man λ_1 statt λ setzt. Durch abermalige Anwendung von (3.) erhält man

$$(7.)\qquad (\lambda_1-\lambda)\int_0^1 u(\lambda,x)v(\lambda_1,x)\,dx = p(1)u(\lambda,1)v(\lambda_1,1) - p(0)u(\lambda,0)v(\lambda_1,0) - \int_0^1 K(x)v(\lambda_1,x)\,dx.$$

Es ist aber nach (6.)

$$(8.)\qquad \int_0^1 K(x)v(\lambda_1,x)\,dx = p(1)u(\lambda_1,1)v(\lambda_1,1) - p(0)u(\lambda_1,0)v(\lambda_1,0),$$

wobei $u(\lambda_1,x)$ eine Lösung von $L(u)+\lambda_1 u=0$ ist. Also erhält man

$$(9.)\qquad (\lambda_1-\lambda)\int_0^1 u(\lambda,x)v(\lambda_1,x)\,dx = p(1)v(\lambda_1,1)(u(\lambda,1)-u(\lambda_1,1)) - p(0)v(\lambda_1,0)(u(\lambda,0)-u(\lambda_1,0)).$$

Es entsteht dann die Aufgabe, *diejenigen Parameterwerte λ zu bestimmen, für welche* (4.) *eine Lösung $u(x)$ besitzt, derart daß*

$$(10.)\qquad u(0)=\gamma,\quad u(1)=\Gamma.$$

Diese Werte von λ, die Eigenwerte unseres Problemes, erhält man also als Wurzeln der Gleichung:

$$(11.)\qquad \frac{1}{v(\lambda,1)}\int_0^1 K(z)v(\lambda,z)\,dz + \frac{p(0)v(\lambda,0)\gamma}{v(\lambda,1)} = p(1)\Gamma.$$

Für Eigenfunktionen $u(\lambda,x), u(\lambda_1,x)$, die zu verschiedenen Eigenwerten λ und λ_1 gehören, verschwindet die rechte Seite von (9.).

Es ist nun keine Spezialisierung, wenn wir im folgenden stets

$$(12.)\qquad p(x)\equiv 1,\quad q(x)\equiv 0$$

setzen. In der Tat erhalten wir diese Spezialisierung, wenn wir statt x die Veränderliche

$$(13.)\qquad \zeta = \int_0^x \frac{dx}{p(x)},$$

statt $v(x)$

$$(13^a.)\qquad \bar{v}(x) = p(x)e^{-\int_0^x \frac{q(x)}{p(x)}dx}\,v(x) = e^{\lambda\zeta},$$

statt $K(x)$

$$(13^b.)\qquad \bar{K}(x) = K(x)\,e^{\int_0^x \frac{q(x)}{p(x)}dx}$$

einführen.

Wir sehen also, daß bei dieser Substitution die Form der Bedingungsgleichung nicht geändert wird.

Unter Beibehaltung der Festsetzung (12.) definieren wir die *Green*sche Funktion $V(\lambda; x, \xi)$ durch folgende Eigenschaften:

(a.) Sie genügt als Funktion von x der Gleichung (5.), d. h. es ist

$$\frac{dV(\lambda; x, \xi)}{dx} - \lambda V(\lambda; x, \xi) = 0. \tag{14.}$$

(b.) Es ist:

$$V(\lambda; \xi - 0, \xi) - V(\lambda; \xi + 0, \xi) = 1. \tag{15.}$$

(c.) Es ist:

$$\int_0^1 K(x) V(\lambda; x, \xi)\, dx + \gamma V(\lambda; 0, \xi) = \Gamma V(\lambda; 1, \xi). \tag{16.}$$

Daraus folgt:

$$V(\lambda; x, \xi) = \frac{\int_\xi^1 K(z) e^{\lambda z} dz - e^\lambda \Gamma}{\int_0^1 K(z) e^{\lambda z} dz + \gamma - e^\lambda \Gamma} e^{\lambda (x - \xi)}, \text{ wenn } x < \xi, \tag{17a.}$$

$$V(\lambda; x, \xi) = -\frac{\int_0^\xi K(z) e^{\lambda z} dz + \gamma}{\int_0^1 K(z) e^{\lambda z} dz + \gamma - e^\lambda \Gamma} e^{\lambda (x - \xi)}, \text{ wenn } x > \xi. \tag{17b.}$$

Setzen wir daher

$$\int_0^1 K(z) e^{\lambda z} dz + \gamma - e^\lambda \Gamma = N(\lambda), \tag{18.}$$

so genügt $V(\lambda; x, \xi)$ in bezug auf ξ der Gleichung

$$\frac{dV(\lambda; x, \xi)}{d\xi} + \lambda V(\lambda; x, \xi) = -\frac{K(\xi) e^{\lambda x}}{N(\lambda)}. \tag{19.}$$

Ferner ist

$$V(\lambda; x, x + 0) - V(\lambda; x, x - 0) = 1. \tag{20.}$$

$$V(\lambda; x, 0) = -\frac{\gamma e^{\lambda x}}{N(\lambda)}; \quad V(\lambda; x, 1) = -\frac{\Gamma e^{\lambda x}}{N(\lambda)}. \tag{21.}$$

Unter Berücksichtigung dieser Eigenschaften folgt durch Einsetzen in (3.):

$$(\lambda - \lambda_1) \int_0^1 V(\lambda; x, z) V(\lambda_1; y, x)\, dx = V(\lambda_1; y, z) - V(\lambda; y, z). \tag{22.}$$

Setzt man speziell $\lambda_1 = 0$, und ist dieses kein Eigenwert, so erhält man für genügend kleine Werte von $|\lambda|$ die Reihenentwicklung:

(23.) $V(\lambda; y, z) = V(0; y, z) + \lambda V^{(2)}(0; y, z) + \lambda^2 V^{(3)}(0; y, z) + \cdots$, wobei

$$(24.)\quad V^{(2)}(0;y,z) = -\int_0^1 V(0;x,z)\,V(0;y,x)\,dx = \Big(\frac{d}{d\lambda}\,V(\lambda;y,z)\Big)_{\lambda=0}.$$

Es genügt daher $V^{(2)}(0;y,z)$ gemäß dieser Definition in bezug auf y der Differentialgleichung:

$$(25.)\qquad \frac{dV^{(2)}(0;y,z)}{dy} - V(0;y,z) = 0,$$

in bezug auf z:

$$(26.)\qquad \frac{dV^{(2)}(0;y,z)}{dz} + V(0;y,z) = -K(z)\Big(\frac{d}{d\lambda}\,\frac{e^{\lambda y}}{N(\lambda)}\Big)_{\lambda=0}.$$

Ist nun $f(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion, für welche

$$(27.)\qquad f(0) = \gamma,\quad f(1) = \Gamma,$$

ist ferner

$$(28.)\qquad f'(x) = g(x) + K(x),$$

so folgt

$$(29.)\qquad f(x) = \int_0^1 g(z)\,V(0;z,x)\,dz,$$

wobei vorausgesetzt ist, daß $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist, woran wir im folgenden festhalten wollen. Ist $\lambda = 0$ Eigenwert, so sind die folgenden Untersuchungen in einigen wenigen unwesentlichen Punkten zu ändern. Ist auch $g(x)$ einmal stetig differenzierbar und

$$(30.)\qquad g(0) = \gamma,\quad g(1) = \Gamma,$$

$$(31.)\qquad g'(x) = g_1(x) + K(x),$$

so ist

$$(32.)\qquad g(z) = \int_0^1 g_1(y)\,V(0;y,z)\,dy,$$

also

$$(33.)\qquad f(x) = \int_0^1 dz \int_0^1 g_1(y)\,V(0;y,z)\,V(0;z,x)\,dy = -\int_0^1 V^{(2)}(0;y,x)\,g_1(y)\,dy.$$

Ist dagegen

$$(34.)\quad f(1)\,\Gamma - f(0)\,\gamma - \int_0^1 f(x)\,K(x)\,dx = 0,\qquad (35.)\quad f'(x) = g(x),$$

$$(36.)\quad g(1)\,\Gamma - g(0)\,\gamma - \int_0^1 g(x)\,K(x)\,dx = 0,\qquad (37.)\quad g'(x) = g_1(x),$$

so ist:

$$(38.)\qquad f(x) = -\int_0^1 V^{(2)}(0;x,y)\,g_1(y)\,dy.$$

§ 2. Darstellung willkürlicher Funktionen.

Um die kommenden Abschätzungen zu erleichtern, machen wir die Annahme, daß $K(x)$ eine erste Ableitung von beschränkter Schwankung im Intervalle 0 bis 1 besitze. Es werde dann

$$\lambda = \alpha + i\beta \tag{39.}$$

gesetzt, ferner bedeute M im folgenden irgendeine feste positive Zahl, die von Fall zu Fall aber immer wieder eine andere sein kann. Dann ist:

$$\int_a^b K(z)\, e^{\lambda z}\, dz = \frac{K(b)e^{\lambda b} - K(a)e^{\lambda a}}{\lambda} + R(\lambda), \tag{40.}$$

wobei*), wenn $a < b$,

$$|R(\lambda)| < M\left|\frac{e^{\lambda a}}{\lambda^2}\right| \text{ für } \alpha \leqq 0; \quad |R(\lambda)| < M\left|\frac{e^{\lambda b}}{\lambda^2}\right| \text{ für } \alpha \geqq 0. \tag{41.}$$

Wir wollen zunächst die asymptotischen Darstellungen des in (18.) definierten $N(\lambda)$ untersuchen. Es sind dabei folgende Fälle zu unterscheiden:

I. $\gamma \lesseqgtr 0$, $\Gamma \lesseqgtr 0$; II. $\gamma = 0$, $\Gamma \lesseqgtr 0$, III. $\gamma \lesseqgtr 0$, $\Gamma = 0$,

IV. $\gamma = 0$, $\Gamma = 0$, V. $K(x) \equiv 0$.

Dann erhält man für die Nullstellen von $N(\lambda)$, welche einen genügend großen absoluten Betrag haben, bei geeigneter Zuordnung die angenäherten Darstellungen:

$$\lambda_k \backsim \pm 2k\pi i + \lg\frac{\gamma}{\Gamma} \text{ im Falle I,} \tag{42.}$$

$$\lambda_k \backsim \pm 2k\pi i - \lg(\pm 2k\pi i) + \lg\left(\frac{-K(+0)}{\Gamma}\right) \text{ im Falle II,}$$

$$\lambda_k \backsim \pm 2k\pi i + \lg(\pm 2k\pi i) + \lg\left(\frac{-\gamma}{K(1-0)}\right) \text{ im Falle III,}$$

$$\lambda_k \backsim \pm 2k\pi i + \lg\frac{K(+0)}{K(1-0)} \text{ im Falle IV,}$$

$$\lambda_k = \pm 2k\pi i + \lg\frac{\gamma}{\Gamma} \text{ im Falle V.}$$

Dabei sind natürlich $K(+0)$ und $K(1-0)$ als von 0 verschieden angenommen.

Die begangenen Fehler sind dabei bezüglich kleiner als:

$$\frac{M}{|\lambda|}, \quad \frac{|\lg 2k\pi i|}{2k\pi} M, \quad \frac{|\lg 2k\pi i|}{2k\pi} M, \quad \frac{M}{|\lambda|}, \quad 0.$$

Nachdem so in jedem der fünf Fälle die Existenz unendlich vieler Eigenfunktionen erwiesen ist, gehen wir zur Entwicklung willkürlicher Funktionen nach diesen über. Um diese Entwicklung zu erhalten, gehen wir

*) *Herglotz*, a. a. O., S. 88 u. f., *Poincaré*, Propagation de la chaleur, p. 181 u. f.

von der Partialbruchzerlegung von $V^{(2)}(\lambda; x, \xi)$ aus, wobei wir uns des *Cauchy*schen Residuensatzes bedienen wollen. Wir legen in der Ebene der komplexen λ Kurvenvierecke Q_k, welche den Nullpunkt im Innern enthalten und mit wachsendem Index k in das Unendliche wachsen.

Im Falle I lassen wir in

(43.) $\lambda = (2k+1)\pi(\tau \pm i) + \lg\frac{\gamma}{\Gamma}$ und $\lambda = (2k+1)\pi(\pm 1 + \tau i) + \lg\frac{\gamma}{\Gamma}$

τ die Werte von -1 bis $+1$ durchlaufen, $(2k+1)\pi(1+i) + \lg\frac{\gamma}{\Gamma}$ bezeichnen wir als Ecke 1, $(2k+1)\pi(-1+i) + \lg\frac{\gamma}{\Gamma}$ als 2, $(2k+1)\pi(-1-i) + \lg\frac{\gamma}{\Gamma}$ als 3, $(2k+1)\pi(1-i) + \lg\frac{\gamma}{\Gamma}$ als 4. An einer entsprechenden Bezeichnung halten wir auch in den anderen Fällen fest, nur setzen wir bei II:

(44.) $\lambda = (2k+1)\pi(\tau \pm i) - \lg(2k+1)\pi(\tau \pm i) + \lg\left(\frac{-K(+0)}{\Gamma}\right)$

und $\lambda = (2k+1)\pi(\pm 1 + \tau i) - \lg((2k+1)\pi(\pm 1 + \tau i)) + \lg\left(\frac{-K(+0)}{\Gamma}\right)$,

bei III:

(45.) $\lambda = (2k+1)\pi(\tau \pm i) + \lg(2k+1)\pi(\tau \pm i) + \lg\left(\frac{-\gamma}{K(1-0)}\right)$

und $\lambda = (2k+1)\pi(\pm 1 + \tau i) + \lg((2k+1)\pi(\pm 1 + \tau i)) + \lg\left(\frac{-\gamma}{K(1-0)}\right)$,

bei IV:

(46.) $$\lambda = (2k+1)\pi(\tau \pm i) + \lg\frac{K(+0)}{K(1-0)}$$

$$\text{und } \lambda = (2k+1)\pi(\pm 1 + \tau i) + \lg\frac{K(+0)}{K(1-0)},$$

bei V:

(47.) $$\lambda = (2k+1)\pi(\tau \pm i) + \lg\frac{\gamma}{\Gamma}$$

$$\text{und } \lambda = (2k+1)\pi(\pm 1 + \tau i) + \lg\frac{\gamma}{\Gamma}.$$

Liegt nun λ im Inneren von $Q_\varkappa$, so bilden wir:

(48.) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{Q_\varkappa}\left[\frac{V(\bar\lambda; x, \xi)}{\bar\lambda - \lambda} - \frac{V(\bar\lambda; x, \xi)}{\bar\lambda}\right]\frac{d\bar\lambda}{\lambda}$$

$$= [V(\lambda; x, \xi) - V(0; x, \xi)]\frac{1}{\lambda} + \Sigma\varrho(\lambda_k),$$

wobei die $\varrho(\lambda)$ die Residuen des integrierten Ausdrucks in bezug auf diejenigen Pole λ_k von $V(\bar\lambda; x, \xi)$ bedeuten, welche innerhalb $Q_\varkappa$ liegen. Wir setzen:

$$(49.) \qquad u(\lambda_k, \xi) = \left(\int_0^\xi K(z)\, e^{\lambda_k z}\, dz + \gamma \right) e^{-\lambda_k \xi},$$

$$(50.) \qquad v(\lambda_k, x) = \frac{-e^{\lambda_k x}}{N'(\lambda_k)}.$$

Dann wird also bei der Annahme, daß $V(\bar{\lambda}; x, \xi)$ nur einfache Pole im Innern von $Q_\varkappa$ hat:

$$(51.) \qquad \varrho(\lambda_k) = u(\lambda_k, \xi)\, v(\lambda_k, x) \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda} - \frac{1}{\lambda_k} \right) \frac{1}{\lambda}.$$

Treten jedoch mehrfache Pole λ_k auf, so hat man im Zähler von $V(\bar{\lambda}; x, \xi)$ bei der Entwicklung nach Potenzen von $\bar{\lambda} - \lambda_k$ noch entsprechend höhere Potenzen mitzunehmen; dies kann jedoch nur für eine endliche Zahl von Polen eintreten, deren absoluter Betrag unterhalb einer festen Grenze liegt.

Nachdem dies vorausgeschickt, lassen wir $\varkappa$ über alle Grenzen wachsen, während wir λ festhalten. Dann folgt aus (17.) durch eine elementare Abschätzung, daß in (48.) der Integrand mit wachsendem $|\lambda|$ wie $\frac{1}{\lambda^2}$ verschwindet, daß also das Integral mit wachsendem $|\lambda|$ nach 0 konvergiert, woraus dann die gleichmäßige Konvergenz von $\Sigma \varrho(\lambda_k)$, über alle Pole genommen, folgt für alle x und ξ zwischen 0 und 1. Lassen wir nachträglich λ nach 0 konvergieren, so erhalten wir bei Annahme von nur einfachen Polen die Fundamentalformel:

$$(52.) \qquad V^{(2)}(0; x, \xi) = -\sum_k \frac{u(\lambda_k, \xi)\, v(\lambda_k, x)}{\lambda_k^2},$$

wobei die rechte Seite für alle in Betracht kommenden Werte von x und ξ gleichmäßig konvergiert.

Erfüllt nun eine gegebene Funktion $f(x)$ die Bedingungen (27.) und (30.), so folgt aus (33.):

$$(53.) \qquad f(x) = \sum_k \frac{u(\lambda_k, x)}{\lambda_k^2} \int_0^1 v(\lambda_k, y)\, g_1(y)\, dy = \sum_k u(\lambda_k, x) \int_0^1 f(z)\, v(\lambda_k, z)\, dz.$$

Erfüllt dagegen die gegebene Funktion die Bedingungen (34.) und (36.), so folgt aus (38.):

$$(54.) \qquad f(x) = \Sigma \frac{v(\lambda_k, x)}{\lambda_k^2} \int_0^1 u(\lambda_k, y)\, g_1(y)\, dy = \Sigma v(\lambda_k, x) \int_0^1 f(z)\, u(\lambda_k, z)\, dz.$$

Wir haben also vermittelst der Theorie der Integralgleichungen rasch hinreichende Bedingungen für die Möglichkeit der Entwicklung einer gegebenen Funktion in eine der beiden Reihen (53.) und (54.) erhalten; um die Bedingungen zu vereinfachen, bedienen wir uns einer im Grundge-

danken von Herrn *Kneser* geschaffenen Methode, indem wir im nächsten Paragraphen einige Hilfsformeln ableiten, welche dann in § 4 zur gewünschten Vereinfachung der Bedingungen führen werden.

§ 3. Ableitung von Hilfsformeln.

Wir beginnen mit der Diskussion der Gültigkeit folgender Formeln:

$$(55.) \qquad V(0;x,y) = -\sum_k \frac{u(\lambda_k,y)v(\lambda_k,x)}{\lambda_k}, \quad \text{wenn } x \gtrless y,$$

$$(56.) \qquad \frac{1}{2}\left(V(0;y-0,y)+V(0;y+0,y)\right) = -\sum_k \frac{u(\lambda_k,y)v(\lambda_k,y)}{\lambda_k},$$

$$(57.) \qquad \left(\frac{e^{\lambda x}}{N(\lambda)}\right)_{\lambda=0} = \sum_k \frac{v(\lambda_k,x)}{\lambda_k},$$

$$(58.) \qquad \left(\frac{d}{d\lambda}\,\frac{e^{\lambda x}}{N(\lambda)}\right)_{\lambda=0} = \sum_k \frac{v(\lambda_k,x)}{\lambda_k^2}.$$

Wir bedienen uns wiederum des *Cauchy*schen Satzes, wobei wir die in (43.) bis (47.) definierten Kurvenzüge Q_k für die Fälle I bis V als Integrationswege nehmen. Bei jedem derartigen Kurvenintegral wollen wir den Teil von Ecke 1 bis 2 im folgenden stets mit J_1, von 2 bis 3 mit J_2, von 3 bis 4 mit J_3, von 4 bis 1 mit J_4 bezeichnen. Ferner wollen wir wie früher zwei Ausdrücke durch $\sim$ verbinden, wenn ihr Unterschied mit ins Unendliche wachsendem k nach 0 konvergiert. Wir behandeln jeden der fünf Fälle gesondert.

Fall I. Es ist

$$(59.) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{Q_x} \frac{V(\bar\lambda;x,y)}{\bar\lambda}\,d\bar\lambda = V(0;x,y) + \Sigma\frac{u(\lambda_k,y)v(\lambda_k,x)}{\lambda_k},$$

wobei die Summe über alle Eigenwerte λ_k im Innern von Q_x zu nehmen ist. Nun verschwindet bei dem Integrale J_1, J_2, J_3, J_4 einzeln mit wachsendem x, wenn nicht gleichzeitig $x=0$, $y=1$, oder $x=1$, $y=0$ ist, woraus (55.) folgt.

Zum Beweise von (56.) bilden wir bei entsprechender Bezeichnung, wenn $0<y<1$,

$$(60.) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{Q_k} \frac{V(\bar\lambda;y+0,y)+V(\bar\lambda;y-0,y)}{2\bar\lambda}\,d\bar\lambda = \bar J_1+\bar J_2+\bar J_3+\bar J_4;$$

wobei

$$\bar J_1 \sim \frac{1}{4\pi i}\int_{+1}^{-1} \frac{-1+e^{(2k+1)\pi\tau}}{1+e^{(2k+1)\pi\tau}}\,\frac{d\tau}{\tau+i},$$

$$\bar{J}_3 \sim \frac{1}{4\pi i}\int_{-1}^{+1} \frac{-1+e^{(2k+1)\pi\tau}}{1+e^{(2k+1)\pi\tau}}\,\frac{d\tau}{\tau-i} = -\frac{1}{4\pi i}\int_{+1}^{-1} \frac{-1+e^{(2k+1)\pi\tau}}{1+e^{(2k+1)\pi\tau}}\,\frac{d\tau}{\tau+i},$$

$$\bar{J}_2 \sim \frac{1}{4\pi i}\int_{+1}^{-1} \frac{-i\,d\tau}{-1+\tau i},$$

$$\bar{J}_4 \sim \frac{1}{4\pi i}\int_{-1}^{+1} \frac{i\,d\tau}{1+\tau i} = \frac{1}{4\pi i}\int_{+1}^{-1} \frac{d\tau i}{-1+\tau i},$$

also:

$$\bar{J}_1+\bar{J}_2+\bar{J}_3+\bar{J}_4 \sim 0. \tag{61.}$$

Damit ist (56.) bewiesen. Da die entsprechenden vier Integrale beim Beweise von (57.) und (58.) einzeln ~ 0 sind, wenn $0<x<1$, so hat man die Zusammenfassung:

Im Falle I gilt (55.), wenn nicht gleichzeitig $x=0$, $y=1$, oder $x=1$, $y=0$ ist, (56.), wenn $0<y<1$, (57.) und (58.), wenn $0<x<1$.

Fall II. Wir wählen als Q_x den durch (44.) festgelegten Kurvenzug. Dann beweist man (55.) wie oben, wenn nicht gleichzeitig $x=1$, $y=0$, oder überhaupt $x=0$. Für $x=0$ hat man:

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{Q_x} \frac{V(\bar{\lambda};0,y)}{\bar{\lambda}}\,d\bar{\lambda} = \frac{1}{2}\,\frac{K(y)}{K(0)} = V(0;0,y)+\sum \frac{u(\lambda_k,y)v(\lambda_k,0)}{\lambda_k}, \tag{62.}$$

so daß also, wenn $x=0$, die rechte Seite von (55.) das Zusatzglied $\frac{1}{2}\,\frac{K(y)}{K(0)}$ erhält.

Beim Beweise von (56.) hat man bei analoger Bezeichnung, wie oben, wenn $0<y<1$:

$$\bar{J}_1 \sim \frac{1}{4\pi i}\int_{+1}^{-1} \frac{1-e^{(2k+1)\pi\tau}}{-1-e^{(2k+1)\pi\tau}}\,\frac{d\tau}{\tau+i},$$

$$\bar{J}_3 \sim \frac{1}{4\pi i}\int_{-1}^{+1} \frac{1-e^{(2k+1)\pi\tau}}{-1-e^{(2k+1)\pi\tau}}\,\frac{d\tau}{\tau-i} = -\frac{1}{4\pi i}\int_{+1}^{-1} \frac{1-e^{(2k+1)\pi\tau}}{-1-e^{(2k+1)\pi\tau}}\,\frac{d\tau}{\tau+i},$$

$$\bar{J}_2 \sim \frac{1}{4\pi i}\int_{+1}^{-1} \frac{-d\tau}{-1+i\tau},$$

$$\bar{J}_4 \sim \frac{1}{4\pi i}\int_{-1}^{+1} \frac{d\tau}{1+i\tau} = \frac{1}{4\pi i}\int_{+1}^{-1} \frac{d\tau}{-1+i\tau}.$$

Also ist wiederum $\bar{J}_1+\bar{J}_2+\bar{J}_3+\bar{J}_4 \sim 0$ und (56.) bewiesen. Ist $0<x<1$, so folgt wie oben die Richtigkeit von (57.) und (58.). Zusammenfassend hat man:

Im Falle II gilt (55.), wenn nicht gleichzeitig $x=1$, $y=0$ oder überhaupt $x=0$, in welchem Falle die rechte Seite von (55.) das Zusatz-

glied $\frac{1}{2}\frac{K(y)}{K(0)}$ erhält; es gilt ferner (56.), wenn $0<y<1$ ist, (57.) und (58.), wenn $0<x<1$.

Analog hat man:

Im Falle III gilt (55.), wenn nicht gleichzeitig $x=0, y=1$ oder überhaupt $x=1$, in welchem Falle die rechte Seite von (55.) das Zusatzglied $-\frac{1}{2}\frac{K(y)}{K(1)}$ erhält; es gilt ferner (56.), wenn $0<y<1$, (57.) und (58.), wenn $0<x<1$.

Beim Beweise von (57.) hat man bei den betreffenden Integralen J_1 und J_3 noch je in 2 Teile zu teilen, die $0<\tau<1$ und $-1<\tau<0$ entsprechen.

Fall IV. Beim Beweise von (56.) hat man, wenn $0<y<1$

$$(63.)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\varrho_x}\frac{V(\bar\lambda;y-0,y)+V(\bar\lambda;y+0,y)}{2\bar\lambda}\,d\bar\lambda \sim \frac{1}{2\pi i}\int_{\varrho_x}\frac{K(1)e^{\lambda}-2K(y)e^{\lambda y}+K(0)}{K(1)e^{\lambda}-K(0)}\,\frac{d\lambda}{\lambda}\sim 0,$$

wie man erkennt, wenn man den zu positiven Werten von τ gehörigen Teil der Umrandung und den zu negativen Werten von τ gehörigen Teil getrennt betrachtet. Die Integrale über diese beiden Teile sind entgegengesetzt gleichen Werten äquivalent, woraus (63.) folgt.

Dagegen konvergiert im Falle IV die unendliche Reihe in (57.) im allgemeinen überhaupt nicht. Um dies einzusehen, setzen wir etwa:

$$(64.)\qquad K(x)\equiv 1,$$

dann ist nach (50):

$$(65.)\qquad v(\lambda_k,x)=-e^{2k\pi i x}2k\pi i,$$

also:

$$(66.)\qquad \Sigma\frac{v(\lambda_k,x)}{\lambda_k}=-\Sigma e^{2k\pi i x}.$$

Man findet:

Im Falle IV gilt (55.), wenn $0<x<1$. Ist $x=0$, so erhält die rechte Seite von (55.) das Zusatzglied $\frac{1}{2}\frac{K(y)}{K(0)}$, ist $x=1$, das Zusatzglied $-\frac{1}{2}\frac{K(y)}{K(1)}$; ferner gilt (56.), wenn $0<y<1$, dagegen gilt im allgemeinen (57.) nicht.

Im Falle V ist alles wie im Falle I.

§ 4. Vereinfachung der Voraussetzungen über die zu entwickelnden Funktionen.

Wir nehmen jetzt an, $f(x)$ sei in einem Intervalle 0 bis 1 stückweise stetig und stückweise zweimal stetig differenzierbar. Dann betrachten wir die beiden charakteristischen Ausdrücke:

$$(67.)\quad S_k = u(\lambda_k, x)\int_a^b f(y)v(\lambda_k, y)\,dy; \quad T_k = v(\lambda_k, x)\int_a^b f(y)\,u(\lambda_k, y)\,dy.$$

Wir formen diese beiden Ausdrücke im Anschluß an Herrn *Kneser* a. a. O. um, unter der Annahme, daß $f(y)$ zwischen a und b stetig und zweimal stetig differenzierbar ist. Dann hat man:

$$(68.)\quad S_k = \frac{u(\lambda_k, x)}{\lambda_k}\left[v(\lambda_k, y)f(y)\right]_a^b - \frac{u(\lambda_k, x)}{\lambda_k}\int_a^b f'(y)v(\lambda_k, y)\,dy$$

$$= \frac{u(\lambda_k, x)}{\lambda_k}\left[v(\lambda_k, y)f(y)\right]_a^b - \frac{u(\lambda_k, x)}{\lambda_k^2}\left[v(\lambda_k, y)f'(y)\right]_a^b + \frac{u(\lambda_k, x)}{\lambda_k^2}\int_a^b f''(y)v(\lambda_k, y)\,dy.$$

$$(69.)\quad T_k = \frac{v(\lambda_k, x)}{\lambda_k}\int_a^b f(y)K(y)\,dy - \frac{v(\lambda_k, x)}{\lambda_k}\left[u(\lambda_k, y)f(y)\right]_a^b$$

$$+ \frac{v(\lambda_k, x)}{\lambda_k}\int_a^b f'(y)\,u(\lambda_k, y)\,dy$$

$$= \frac{v(\lambda_k, x)}{\lambda_k}\int_a^b f(y)K(y)\,dy - \frac{v(\lambda_k, x)}{\lambda_k}\left[u(\lambda_k, y)f(y)\right]_a^b + \frac{v(\lambda_k, x)}{\lambda_k^2}\int_a^b f'(y)K(y)\,dy$$

$$- \frac{v(\lambda_k, x)}{\lambda_k^2}\left[u(\lambda_k, y)f'(y)\right]_a^b + \frac{v(\lambda_k, x)}{\lambda_k^2}\int_a^b f''(y)\,u(\lambda_k, y)\,dy.$$

Wir benutzen jetzt die gleichmäßige Konvergenz der rechten Seite von (52.), ferner die Gleichungen (55.) bis (58.) zur Bildung von ΣS_k und ΣT_k. Man hat dann:

$$(70.)\quad \Sigma S_k = \left[f(y)\Sigma\frac{u(\lambda_k, x)v(\lambda_k, y)}{\lambda_k}\right]_{y=a}^{y=b} + \left[f'(y)\,V^{(2)}(0; y, x)\right]_{y=a}^{y=b}$$

$$- \int_a^b f''(y)\,V^{(2)}(0; y, x)\,dy$$

$$= \left[f(y)\Sigma\frac{u(\lambda_k, x)v(\lambda_k, y)}{\lambda_k}\right]_{y=a}^{y=b} + \int_a^b f'(y)\frac{d}{dy}\,V^{(2)}(0; y, x)\,dy.$$

Da aber nach (25.) und (14.):

$$(71.)\quad \int_a^b f'(y)\frac{d}{dy}\,V^{(2)}(0; y, x)\,dy = \int_a^b f'(y)\,V(0; y, x)\,dy = \left[f(y)V(0; y, x)\right]_{y=a}^{y=b},$$

so folgt:

$$(72.)\quad \Sigma S_k = \left[f(y)\Sigma\frac{u(\lambda_k, x)v(\lambda_k, y)}{\lambda_k}\right]_{y=a}^{y=b} + \left[f(y)\,V(0; y, x)\right]_{y=a}^{y=b}.$$

Und zwar gelten nach den Ausführungen des letzten Paragraphen diese Formeln in allen fünf Fällen, wenn nur $0 < x < 1$ ist.

Entsprechend hat man auf Grund der Formeln (55.) bis (58.):

$$(73.)\quad \Sigma T_k = \frac{1}{N(0)}\int_a^b f(y)K(y)\,dy - \Big[f(y)\,\Sigma\frac{v(\lambda_k,x)\,u(\lambda_k,y)}{\lambda_k}\Big]_{y=a}^{y=b}$$
$$+\Big(\frac{d}{d\lambda}\frac{e^{\lambda x}}{N(\lambda)}\Big)_{\lambda=0}\int_a^b f'(y)K(y)\,dy + [V^{(2)}(0;x,y)f'(y)]_{y=a}^{y=b} - \int_a^b V^{(2)}(0;x,y)f''(y)\,dy.$$

Es ist aber nach (26.) bzw. (19.):

$$(74.)\quad -\int_a^b V^{(2)}(0;x,y)f''(y)\,dy = -[V^{(2)}(0;x,y)f'(y)]_{y=a}^{y=b}$$
$$-\int_a^b V(0;x,y)f'(y)\,dy - \Big(\frac{d}{d\lambda}\frac{e^{\lambda x}}{N(\lambda)}\Big)_{\lambda=0}\int_a^b f'(y)K(y)\,dy,$$

$$(75.)\quad -\int_a^b V(0;x,y)f'(y)\,dy = -[V(0;x,y)f(y)]_{y=a}^{y=b} - \frac{1}{N(0)}\int_a^b f(y)K(y)\,dy.$$

Also erhält man:

$$(76.)\quad \Sigma T_k = -\Big[f(y)\,\Sigma\frac{v(\lambda_k,x)\,u(\lambda_k,y)}{\lambda_k}\Big]_{y=a}^{y=b} - [V(0;x,y)f(y)]_{y=a}^{y=b}.$$

Wir setzen dabei voraus, daß $0<x<1$ ist, dann gelten diese Umformungen in allen Fällen, außer IV.

Es soll jetzt zunächst die Diskussion von (72.) zu Ende geführt werden. Liegen x, 0 und 1 außerhalb des Intervalles a, b, so folgt aus (55.) in allen fünf Fällen:

$$(77.)\qquad \Sigma S_k = 0.$$

Fällt a mit 0 zusammen, so erhält man im Falle II und IV:

$$(78.)\qquad \Sigma S_k = -\frac{1}{2}\frac{K(x)}{K(+0)}f(+0).$$

Fällt b mit 1 zusammen, so erhält man im Falle III und IV:

$$(79.)\qquad \Sigma S_k = -\frac{1}{2}\frac{K(x)}{K(1-0)}f(1-0).$$

Fällt x in das Innere des Intervalles a, b, so zerlegt man das Intervall a, b in die Intervalle a, x und x, b. Für das Intervall a, x aber hat man nach (56.) und (15.), wenn $\Sigma S_k(a,x)$ die Summe der Integrale S_k über das Intervall a, x bedeutet,

$$(80.)\quad \Sigma S_k(a,x) = f(x-0)\,\frac{1}{2}\,(V(0;x-0,x) - V(0;x+0,x)) = \frac{1}{2}f(x-0).$$

Für das Intervall x, b hat man

$$(81.)\quad \Sigma S_k(x,b) = -f(x+0)\,\frac{1}{2}\,(V(0;x+0,x) - V(0;x-0,x)) = \frac{1}{2}f(x+0),$$

also, wenn x zwischen a und b liegt,

$$(82.)\qquad \Sigma S_k(a,x,b) = \frac{1}{2}\,(f(x-0)+f(x+0)) = \bar{f}(x).$$

Man hat also durch Zusammenfassung dieser Formeln, wenn $0 < x < 1$:

Im Falle I und V:

$$(83.) \qquad \bar{f}(x) = \Sigma u(\lambda_k, x) \int_0^1 f(y)\, v(\lambda_k, y)\, dy;$$

im Falle II:

$$(84.) \quad \bar{f}(x) - \frac{1}{2}\frac{K(x)}{K(+0)} f(+0) = \Sigma u(\lambda_k, x) \int_0^1 f(y)\, v(\lambda_k, y)\, dy;$$

im Falle III:

$$(85.) \quad \bar{f}(x) - \frac{1}{2}\frac{K(x)}{K(1-0)} f(1-0) = \Sigma u(\lambda_k, x) \int_0^1 f(y)\, v(\lambda_k, y)\, dy;$$

im Falle IV:

$$(86.) \quad \bar{f}(x) - \frac{1}{2} K(x) \left[\frac{f(+0)}{K(+0)} + \frac{f(1-0)}{K(1-0)}\right] = \Sigma u(\lambda_k, x) \int_0^1 f(y)\, v(\lambda_k, y)\, dy.$$

Erfüllt $f(x)$ die Randbedingungen (27.), so fallen die Zusatzglieder der linken Seite weg.

Wir wenden uns jetzt zu der Diskussion von (76.), welche übrigens einfacher geht, da für $0 < x < 1$ Zusatzglieder nicht auftreten.

Liegt x außerhalb des Intervalles a, b, so folgt

$$(87.) \qquad \Sigma T_k = 0.$$

Liegt x innerhalb a, b, so bilden wir

$$(88.) \quad \Sigma T_k(a, x) = -\frac{f(x-0)}{2}[V(0; x, x-0) - V(0; x, x+0)];$$

$$(89.) \quad \Sigma T_k(x, b) = +\frac{f(x+0)}{2}[V(0; x, x+0) - V(0; x, x-0].$$

Also ist nach (20.)

$$(90.) \qquad \Sigma T_k(a, x, b) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \bar{f}(x).$$

Daher hat man in den Fällen I, II, III, V die Entwicklungen

$$(91.) \qquad \bar{f}(x) = \Sigma v(\lambda_k, x) \int_0^1 f(y)\, u(\lambda_k, y)\, dy.$$

Bezüglich noch weiterer Vereinfachung der Voraussetzungen sei auf *Kneser* a. a. O. verwiesen.

Zum Schlusse wollen wir noch im Falle IV, dem Ausnahmefalle, für das im vorigen Paragraphen eingeführte Beispiel die Entwicklung (91.) betrachten, um die Bedingung zu erkennen, der $f(x)$ zu unterwerfen ist. Es ist also $K(x) \equiv 1$, ferner nach (65.)

$$v(\lambda_k, x) = -2k\pi i e^{2k\pi i x}, \quad u(\lambda_k, y) = \frac{1}{2k\pi i}(1 - e^{-2kiy}).$$

Soll also im Falle IV die Reihe (91.) konvergieren, so muß $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ sein.

Kap. II. Differentialgleichungen 2. Ordnung.

§ 1. Aufstellung der *Green*schen Funktion.

Es seien $p(x)$ und $q(x)$ im Intervalle 0 bis 1 zweimal stetig differenzierbare Funktionen, $p(x)$ sei überdies im ganzen Intervalle wesentlich von Null verschieden. $K(x)$ sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und

$$(1.) \qquad L(v) = \frac{d}{dx} p \frac{dv}{dx} + q(x)v.$$

Dann ist

$$(2.) \qquad \int_a^b (uL(v) - vL(u))\,dx = \left[p(x)\left(u(x)\frac{dv(x)}{dx} - v(x)\frac{du(x)}{dx}\right)\right]_a^b.$$

Es sei jetzt $u(\lambda^2, x)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(3.) \qquad L(u) + \lambda^2 u = K(x),$$

$v_1(\lambda^2, x)$ und $v_2(\lambda^2, x)$ seien solche von

$$(4.) \qquad L(v) + \lambda^2 v = 0,$$

und zwar so normiert, daß

$$(5.) \quad v_1(\lambda^2, 1) = 1,\ v_1'(\lambda^2, 1) = 0;\quad v_2(\lambda^2, 1) = 0,\ v_2'(\lambda^2, 1) = 1.$$

Dann erhält man aus (2.) bekanntlich:

$$(6.) \qquad p(1)\,u(\lambda^2, x) = -\,v_1(\lambda^2, x)\int_0^x v_2(\lambda^2, z)\,K(z)\,dz + v_2(\lambda^2, x)\int_0^x v_1(\lambda^2, z)\,K(z)\,dz + \gamma_1(\lambda^2)\,v_1(\lambda^2, x) + \gamma_2(\lambda^2)\,v_2(\lambda^2, x)$$

wobei

$$(7.) \qquad \gamma_1(\lambda^2) = p(0)\,(u(\lambda^2, 0)\,v_2'(\lambda^2, 0) - u'(\lambda^2, 0)\,v_2(\lambda^2, 0)),$$

$$(8.) \qquad \gamma_2(\lambda^2) = -\,p(0)\,(u(\lambda^2, 0)\,v_1'(\lambda^2, 0) - u'(\lambda^2, 0)\,v_1(\lambda^2, 0)).$$

Aus (2.) folgt ferner:

$$(9.) \qquad (\lambda_1^2 - \lambda^2)\int_0^1 u(\lambda_1^2, x)\,v_3(\lambda^2, x)\,dx = \int_0^1 v_3(\lambda^2, x)\,K(x)\,dx + [p(x)\,(u(\lambda_1^2, x)\,v_3'(\lambda^2, x) - v_3(\lambda^2, x)\,u'(\lambda_1^2, x))]_0^1,$$

wobei

$$(10.) \qquad v_3(\lambda^2, x) = h_1 v_1(\lambda^2, x) + h_2 v_2(\lambda^2, x)$$

ist und h_1 und h_2 gegebene Größen sind. Wir führen dann in (9.) statt

$$(11.) \qquad E_1 = \int_0^1 v_3(\lambda^2, x)\,K(x)\,dx$$

$u(\lambda, x)$ ein, indem wir berücksichtigen, daß

$$(12.) \qquad u(\lambda^2,1)p(1) = -\int_0^1 v_2(\lambda^2,z)K(z)\,dz + \gamma_1(\lambda^2),$$

$$(13.) \qquad u'(\lambda^2,1)p(1) = \int_0^1 v_1(\lambda^2,z)K(z)\,dz + \gamma_2(\lambda^2),$$

also:

$$(14.)\ E_1 = p(1)[h_1u'(\lambda^2,1) - h_2u(\lambda^2,1)] + p(0)[u(\lambda^2,0)v_3'(\lambda^2,0) - u'(\lambda^2,0)v_3(\lambda^2,0)].$$

Bezeichnen wir die eckige Klammer in (9.) mit E_2, so ist:

$$(15.)\ E_2 = p(1)[u(\lambda_1^2,1)h_2 - h_1u'(\lambda_1^2,1)] - p(0)[u(\lambda_1^2,0)v_3'(\lambda^2,0) - u'(\lambda_1^2,0)v_3(\lambda^2,0)].$$

Es ist daher

$$(16.) \qquad E_1 + E_2 = (\lambda_1^2 - \lambda^2)\int_0^1 u(\lambda_1^2,x)\,v_3(\lambda^2,x)\,dx = 0,$$

wenn

$$(17.)\ p(1)[h_1u'(\lambda^2,1) - h_2u(\lambda^2,1)] = p(1)[h_1u'(\lambda_1^2,1) - h_2u(\lambda_1^2,1)] = \gamma,$$

$$(18.)\ p(0)\,u(\lambda^2,0) = p(0)\,u(\lambda_1^2,0) = \alpha,$$

$$(19.)\ p(0)u'(\lambda^2,0) = p(0)u'(\lambda_1^2,0) = \beta,$$

wobei α, β, γ ebenso wie h_1 und h_2 gegebene Konstanten sind.

Es entsteht so die Aufgabe, diejenigen Parameterwerte λ^2 zu bestimmen, für welche (3.) *eine Lösung $u(x)$ besitzt, für welche:*

$$(20.)\quad p(0)u(0) = \alpha, \quad p(0)\,u'(0) = \beta, \quad p(1)[h_1u'(\lambda^2,1) - h_2\,u(\lambda^2,1)] = \gamma$$

ist. Als entsprechende Lösung von (4.) ist eine solche zu wählen, welche proportional ist zu

$$(21.) \qquad v_3(x) = h_1v_1(x) + h_2v_2(x).$$

Die betreffenden Werte von λ^2 nennen wir *Eigenwerte*, die dazugehörigen Funktionen *Eigenfunktionen*. Man erhält also die Eigenwerte als Wurzeln der Gleichung:

$$(22.)\quad N(\lambda^2) = \int_0^1 v_3(\lambda^2,x)K(x)\,dx - \gamma + \beta v_3(\lambda^2,0) - \alpha v_3'(\lambda^2,0) = 0.$$

Es ist nun keine wesentliche Spezialisierung, wenn wir von vornherein in (1.)

$$(23.) \qquad p(x) \equiv 1$$

annehmen, da man in bekannter Weise durch zwei Substitutionen dies erreichen kann, ohne den Charakter der Randbedingungen zu ändern; wir wollen daher im folgenden stets bei dieser Festsetzung bleiben.

Nachdem dies vorausgeschickt ist, gehen wir zur Aufstellung der *Green*schen Funktion $V(\lambda^2;x,\xi)$, welche wir durch folgende Eigenschaften festlegen:

(a) Sie genügt als Funktion von x der Gleichung (4.), d.h. es ist

$$(24.) \qquad \frac{d^2}{dx^2} V(\lambda^2; x, \xi) + (q(x) + \lambda^2) V(\lambda^2; x, \xi) = 0.$$

(b) Es ist

$$(25.) \qquad \left(\frac{d}{dx} V(\lambda^2; x, \xi)\right)_{x=\xi-0} - \left(\frac{d}{dx} V(\lambda^2; x, \xi)\right)_{x=\xi+0} = 1.$$

(c) Es existiert ein Proportionalitätsfaktor ϱ, so daß

$$(26.) \qquad V(\lambda^2; 1, \xi) = \varrho h_1, \ \left(\frac{d}{dx} V(\lambda^2; x, \xi)\right)_{x=1} = \varrho h_2 \quad \text{ist.}$$

(d) Es ist

$$(27.) \qquad \int_0^1 V(\lambda^2; z, \xi) K(z) dz - \varrho\gamma + \beta V(\lambda^2; 0, \xi) - \alpha \left(\frac{d}{dx} V(\lambda^2; x, \xi)\right)_{x=0} = 0.$$

Um die *Green*sche Funktion in expliziter Form zu erhalten, führen wir neben dem durch (10.) definierten $v_3(\lambda^2, x)$ noch

$$(28.) \quad v_4(\lambda^2, z) = v_1(\lambda^2, z) v_2(\lambda^2, \xi) - v_2(\lambda^2, z) v_1(\lambda^2, \xi) = v_4(\lambda^2; z, \xi)$$

ein, so daß man hat:

$$(29.) \qquad (v_4(\lambda^2; z, \xi))_{z=\xi} = 0, \ \frac{d}{dz}(v_4(\lambda^2; z, \xi))_{z=\xi} = -1.$$

Dann ist

$$(30.) \qquad V(\lambda^2; x, \xi) = \varrho v_3(\lambda^2, x), \text{ wenn } x \geqq \xi,$$
$$= \varrho v_3(\lambda^2, x) - v_4(\lambda^2; x, \xi), \text{ wenn } x \leqq \xi.$$

Durch Einsetzen in (27.) erhält man:

$$(31.) \quad \varrho = \frac{\int_0^\xi v_4(\lambda^2; z, \xi) K(z) dz + \beta v_4(\lambda^2; 0, \xi) - \alpha \left(\frac{d}{dz} v_4(\lambda^2; z, \xi)\right)_{z=0}}{\int_0^1 K(z) v_3(\lambda^2, z) dz - \gamma + \beta v_3(\lambda^2, 0) - \alpha v_3'(\lambda^2, 0)}.$$

Also hat man:

$$(32.) \quad V(\lambda^2; x, \xi) = \frac{\int_0^\xi v_4(\lambda^2; z, \xi) K(z) dz + \beta v_4(\lambda^2; 0, \xi) - \alpha \left(\frac{d}{dz} v_4(\lambda^2; z, \xi)\right)_{z=0}}{\int_0^1 K(z) v_3(\lambda^2, z) dz - \gamma + \beta v_3(\lambda^2, 0) - \alpha v_3'(\lambda^2, 0)} v_3(\lambda^2, x),$$

wenn $x \geqq \xi$,

$$= \frac{\int_0^\xi K(z) v_5(\lambda^2; z, x, \xi) dz - \int_\xi^1 K(z) v_3(\lambda^2, z) dz \, v_4(\lambda^2; x, \xi) - \gamma v_4(\lambda^2; x, \xi) + \beta v_5(\lambda^2; 0, x, \xi) - \alpha \left(\frac{d}{dz} v_5(\lambda^2; z, x, \xi)\right)_{z=0}}{\int_0^1 K(z) v_3(\lambda^2, z) dz - \gamma + \beta v_3(\lambda^2, 0) - \alpha v_3'(\lambda^2, 0)}$$

wenn $x \leqq \xi$;

dabei ist

(33.) $$v_5(\lambda^2; z, x, \xi) = v_4(\lambda^2, z)\, v_3(\lambda^2, x) - v_3(\lambda^2, z)\, v_4(\lambda^2, x)$$

in bezug auf x und z eine Lösung der Differentialgleichung (4.), welche für $x = z$ bzw. $z = x$ verschwindet und für welche

(34.) $$\Big(\frac{dv_5(\lambda^2; z, x, \xi)}{dz}\Big)_{z=x} = -\Big(\frac{dv_5(\lambda^2; z, x, \xi)}{dx}\Big)_{x=z} = -v_3(\lambda^2, \xi).$$

Aus Obigem gewinnen wir die Eigenschaften von $V(\lambda^2; x, \xi)$ bezüglich ξ. Es ist

(35.) $$\frac{d^2}{d\xi^2} V(\lambda^2; x, \xi) + (q(\xi) + \lambda^2)\, V(\lambda^2; x, \xi) = \frac{K(\xi) v_3(\lambda^2, x)}{N(\lambda^2)}.$$

Ferner ist

(36.) $$\Big(\frac{d}{d\xi} V(\lambda^2; x, \xi)\Big)_{\xi=x-0} - \Big(\frac{d}{d\xi} V(\lambda^2; x, \xi)\Big)_{\xi=x+0} = 1,$$

(37.) $$V(\lambda^2; x, 0) = \frac{\alpha}{N(\lambda^2)} v_3(\lambda^2, x); \quad \Big(\frac{d}{d\xi} V(\lambda^2; x, \xi)\Big)_{\xi=0} = \frac{\beta}{N(\lambda^2)} v_3(\lambda^2, x),$$

$$h_1\Big(\frac{d}{d\xi} V(\lambda^2; x, \xi)\Big)_{\xi=1} - h_2 V(\lambda^2; x, 1) = \frac{\gamma}{N(\lambda^2)} v_3(\lambda^2, x).$$

Bei der Ableitung dieser Formeln geht man am besten direkt von (30.) aus.

Durch Anwendung von (2.) folgt:

(38.) $$(\lambda_1^2 - \lambda^2) \int_0^1 V(\lambda^2; x, z)\, V(\lambda_1^2; y, x)\, dx = V(\lambda_1^2; y, z) - V(\lambda^2; y, z).$$

Es sei nun $f(x)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für welche

(39.) $$\frac{d^2 f}{dx^2} + q(x) f = K(x) - g(x),$$

(40.) $$f(0) = \alpha, \quad f'(0) = \beta, \quad h_1 f'(1) - h_2 f(1) = \gamma,$$

so folgt, wenn, was wir immer annehmen dürfen, $\lambda^2 = 0$ kein Eigenwert ist,

(41.) $$f(x) = \int_0^1 V(0; z, x) g(z)\, dz.$$

Ist dagegen

(42.) $$\frac{d^2 f}{dx^2} + q(x) f = -g(x),$$

(43.) $$f(1) = \varrho h_1, \; f'(1) = \varrho h_2, \int_0^1 f(z) K(z)\, dz - \varrho\gamma + \beta f(0) - \alpha f'(0) = 0,$$

wobei ϱ irgend ein Proportionalitätsfaktor ist, so ist

(44.) $$f(x) = \int_0^1 V(0; x, z) g(z)\, dz.$$

§ 2. Darstellung willkürlicher Funktionen.

Wir haben jetzt dieselben Schritte zu machen wie bei den Differentialgleichungen erster Ordnung; wir brauchen dazu für große Werte von $|\lambda^2|$

asymptotische Darstellungen der Lösungen von (3.) und (4.), welche wir im Anschluß an *Liouville* in bekannter Weise aufstellen. Da wir an (23.) festhalten, so hat man für jede Lösung von (4.):

$$v(x) = c_1 e^{i\lambda(x-1)} + c_2 e^{-i\lambda(x-1)} + \frac{e^{-i\lambda(x-1)}}{2\lambda i}\int_1^x v(z)\,q(z)\,e^{\lambda i(z-1)}\,dz$$
$$- \frac{e^{\lambda i(x-1)}}{2\lambda i}\int_1^x v(z)\,q(z)\,e^{-\lambda i(z-1)}\,dz.$$

Es sei jetzt

$$\lambda = \alpha + \beta i,$$

dann setzen wir fest, daß in

$$e^{\pm\lambda i\varphi(x)} \text{ bzw. } e^{\mp\lambda i\varphi(x)}$$

bei positivem oder verschwindendem β jeweils das untere, bei negativem β das obere Zeichen gelten soll. Es sei ferner $R(x)$ ein allgemeines Funktionszeichen, welches die Eigenschaft hat, daß stets

(45.) $$|R(x)| < M, \quad \text{wenn } |c_1^2| + |c_2^2| = 1,$$

wobei M eine feste Zahl bedeutet; dann ist

(46.) $$v(x) = c_1 e^{i\lambda(x-1)} + c_2 e^{-i\lambda(x-1)} + \frac{1}{\lambda} R(x)\,e^{\mp\lambda i(x-1)}, \text{ wenn } x \leqq 1 \text{ ist.}$$

Man erhält so

(47.) $$v_1(\lambda^2, x) = \frac{1}{2} e^{i\lambda(x-1)} + \frac{1}{2} e^{-i\lambda(x-1)} + \frac{1}{\lambda} R(x) e^{\mp\lambda i(x-1)}, \text{ wenn } x \leqq 1,$$

$$i\lambda v_2(\lambda^2, x) = \frac{1}{2} e^{i\lambda(x-1)} - \frac{1}{2} e^{-i\lambda(x-1)} + \frac{1}{\lambda} R(x) e^{\mp\lambda i(x-1)}, \text{ wenn } x \leqq 1,$$

$$v_3(\lambda^2, x) = \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2i\lambda}\right) e^{i\lambda(x-1)} + \left(\frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2i\lambda}\right) e^{-i\lambda(x-1)} + \frac{1}{\lambda} R(x) e^{\mp\lambda i(x-1)},$$

wenn $x \leqq 1$, $h_1 \neq 0$. Ist $h_1 = 0$, so wird $v_3(\lambda^2, x) = h_2 v_2(\lambda^2, x)$. Ferner ist

$$i\lambda v_4(\lambda^2; x, \xi) = -\frac{1}{2} e^{i\lambda(x-\xi)} + \frac{1}{2} e^{-i\lambda(x-\xi)} + \frac{1}{\lambda} R(x) e^{\mp\lambda i(x-\xi)},$$
$$\text{wenn } x \leqq \xi,$$
$$= -\frac{1}{2} e^{i\lambda(x-\xi)} + \frac{1}{2} e^{-i\lambda(x-\xi)} + \frac{1}{\lambda} R(x) e^{\pm\lambda i(x-\xi)},$$
$$\text{wenn } x \geqq \xi.$$

Nachdem dies vorausgeschickt ist, gehen wir zu der asymptotischen Darstellung der Eigenwerte über, also der Nullstellen von

$$N(\lambda^2) = \int_0^1 K(z)\,v_3(\lambda^2, z)\,dz - \gamma + \beta v_3(\lambda^2, 0) - \alpha v_3'(\lambda^2, 0).$$

Da wir $K(z)$ als zweimal stetig differenzierbar, sowie $K(0)$ und $K(1)$ von Null verschieden annehmen, so folgt:

$$(48.)\quad \int_0^1 K(z)\,v_3(\lambda^2,z)\,dz \backsim \frac{h_2 K(1)}{\lambda^2} - \frac{i\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2i\lambda}\right)e^{-i\lambda}K(0)}{\lambda} + \frac{i\left(\frac{h_1}{2}-\frac{h_2}{2i\lambda}\right)e^{i\lambda}K(0)}{\lambda},$$

wobei $\backsim$ das Vernachlässigen von Gliedern andeutet, welche mit wachsendem $|\lambda|$ von höherer Ordnung verschwinden.

Wir verstehen im folgenden unter

$$(49.)\qquad (a,b,c,\ldots)\neq 0 \text{ bzw. } (a,b,c,\ldots)=0,$$

daß jede Größe a,b,c von Null verschieden ist, bzw. daß jede verschwindet. Dann unterscheiden wir folgende Fälle:

(50.) I. $(\alpha,\beta,\gamma,h_1)\neq 0$; II. $(\alpha,\beta,\gamma)\neq 0, h_1=0$; III. $(\beta,h_1)\neq 0,\ \alpha=0$;
IV. $(\beta,\gamma)\neq 0,\ (\alpha,h_1)=0$. V. $\beta\neq 0;\ (\alpha,\gamma,h_1)=0$;
VI. $(\gamma,h_1)\neq 0;\ (\alpha,\beta)=0$; VII. $\gamma\neq 0;\ (\alpha,\beta,h_1)=0$;
VIII. $h_1\neq 0;\ (\alpha,\beta,\gamma)=0$; IX. $(\alpha,\beta,\gamma,h_1)=0$; X. $K(x)\equiv 0$.

Für die Nullstellen λ_k^2, für welche $|\lambda_k|$ groß genug ist, hat man:

Im Falle I: $\lambda_k \backsim \pm k\pi$;

Im Falle II: $\lambda_{2k} \backsim \arccos\left(\frac{-\gamma}{\alpha h_2}\right) \pm 2k\pi$; $\lambda_{2k+1} \backsim -\arccos\left(\frac{-\gamma}{\alpha h_2}\right) \pm 2k\pi$;

Im Falle III: $\lambda_{2k} \backsim \arccos\left(\frac{\gamma}{\beta h_1}\right) \pm 2k\pi$; $\lambda_{2k+1} \backsim -\arccos\left(\frac{\gamma}{\beta h_1}\right) \pm 2k\pi$;

Im Falle IV: $\lambda_{2k} \backsim -i\lg\frac{-2\gamma i}{\beta h_2} \pm 2k\pi - i\lg \pm 2k\pi$;

$$\lambda_{2k+1} \backsim i\lg\frac{2\gamma i}{\beta h_2} \pm 2k\pi + i\lg \pm 2k\pi;$$

Im Falle V: $\lambda_k \backsim \pm k\pi$;

Im Falle VI: $\lambda_{2k} \backsim -i\lg\frac{-2\gamma i}{h_1 K(0)} \pm 2k\pi - i\lg \pm 2k\pi$;

$$\lambda_{2k+1} \backsim +i\lg\frac{2\gamma i}{h_1 K(0)} \pm 2k\pi + i\lg \pm 2k\pi;$$

Im Falle VII: $\lambda_{2k} \backsim -i\lg\frac{-2\gamma}{h_2 K(0)} \pm 2k\pi - 2i\lg \pm 2k\pi$;

$$\lambda_{2k+1} \backsim i\lg\frac{-2\gamma}{h_2 K(0)} \pm 2k\pi + 2i\lg \pm 2k\pi i;$$

Im Falle VIII: $\lambda_k \backsim \pm k\pi$;

Im Falle IX: $\lambda_{2k} \backsim \arccos\frac{K(1)}{K(0)} \pm 2k\pi$; $\lambda_{2k+1} \backsim -\arccos\frac{K(1)}{K(0)} \pm 2k\pi$.

Was die in X zusammengefaßten Fälle anbelangt, so ist $K(x)\equiv 0$ verträglich mit den Fällen I—V, wobei die asymptotischen Darstellungen erhalten bleiben.

Wir führen wie in Kap. I, § 2 in der komplexen λ-Ebene Vierecke Q_k ein, deren Ecken wir wie dort mit $1,2,3,4$ bezeichnen. Bei ent-

sprechender Bezeichnung haben wir, wenn $-1 \leqq \tau \leqq$ ist 1, für die Kurvenvierecke:

(51.) $\lambda = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi(\pm 1 + \tau i)$; $\lambda = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi(\pm i + \tau)$ bei I, V, VIII;

$\lambda = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi(\pm 1 + \tau i)$; $\lambda = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi(\pm i + \tau)$ bei II, VII, IX;

ferner bei III, wenn dort $\gamma \neq 0$;

$\lambda = 2k\pi(\pm 1 + \tau i)$; $\lambda = 2k\pi(\pm i + \tau)$ bei IV, VI,

ferner bei III, wenn dort $\gamma = 0$.

Nachdem dies festgesetzt ist, gehen wir auf die asymptotische Darstellung von $V(\lambda^2; x, \xi)$ längs diesen Kurven Q_k näher ein und stellen zunächst neben die asymptotischen Darstellungen (47.) noch

$$(52.)\quad v_5(\lambda^2; z, x, \xi) = -\frac{v_3(\lambda^2, \xi)}{2i\lambda}\left[e^{i\lambda(z-x)} - e^{-i\lambda(z-x)} + \frac{1}{\lambda}R(z,x)e^{\mp\lambda i(z-x)}\right],$$

wenn $z \leqq x$;

ist $z \geqq x$, so ist im letzten Exponenten $\pm$ zu schreiben. Aus (52.) folgt

$$(53.)\quad v_5(\lambda^2; z; x, \xi) \backsim -\left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2i\lambda}\right)\left[\frac{e^{i\lambda(\xi+z-x-1)} - e^{i\lambda(\xi+x-z-1)}}{2i\lambda}\right]$$
$$-\left(\frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2i\lambda}\right)\left[\frac{e^{-i\lambda(\xi-z+x-1)} - e^{-i\lambda(\xi+z-x-1)}}{2i\lambda}\right],$$

wobei das hier umständlicher zu schreibende Glied mit R unterdrückt ist.

Es folgt, daß im Nenner von $V(\lambda^2; x, \xi)$ stets $e^{\pm\lambda i}$, im Zähler höchstens $e^{\pm\lambda i}$ vorkommt, so daß ein Unendlichwerden wie bei einer Exponentialfunktion von vornherein ausgeschlossen ist, wenn wir uns an die Festsetzung bezüglich $\pm$ erinnern. Daraus schließen wir leicht, daß eine Zahl M existiert derart, daß in jedem Falle bei genügend großem k auf Q_k

$$(54.)\qquad |V(\lambda; x, \xi)| < \frac{M}{|\lambda|}$$

ist, wenn M eine feste Größe. Im Falle I und II rührt dieser Faktor $\frac{1}{|\lambda|}$ in der Ungleichung von $v_3'(\lambda^2, 0)$ her; in den anderen Fällen ergibt sich (54.) aus ähnlichen Gründen.

Wir setzen jetzt

$$(55.)\quad u(\lambda_k^2, \xi) = \int_0^\xi v_4(\lambda^2; z, \xi)K(z)\,dz + \beta v_4(\lambda^2; 0, \xi) - \alpha\left(\frac{d}{dz}v_4(\lambda^2; z, \xi)\right)_{z=0},$$

$$(56.)\qquad v(\lambda_k^2, x) = -\frac{2v_3(\lambda_k^2, x)\,\lambda_k}{\frac{d}{d\lambda}(N(\lambda^2))_{\lambda=\lambda_k}};$$

dann folgt aus dem *Cauchy*schen Satze und aus (54.):

$$(57.)\quad \lim_{k=0} \frac{1}{2\pi i} \int_{Q_k} \frac{V(\bar{\lambda}^2; x, \xi)}{\bar{\lambda}}\, d\bar{\lambda} = 0 = V(0; x, \xi) - \sum \frac{u(\lambda_k^2, \xi) v(\lambda_k^2, x)}{2\lambda_k^2}.$$

Nun sind alle hierin vorkommenden Funktionen in bezug auf λ gerade, weshalb wir die Glieder mit $+\lambda_k$ und $-\lambda_k$ zusammenfassen können, wodurch wir die Grundformel

$$(58.)\qquad V(0; x, \xi) = \sum_k \frac{u(\lambda_k^2, \xi) v(\lambda_k^2, x)}{\lambda_k^2}$$

erhalten. Die Summe $\sum_k$ ist über alle Eigenwerte zu nehmen, sie konvergiert gleichmäßig für alle x und ξ zwischen 0 und 1. Treten mehrfache Wurzeln λ_k auf, so ändert sich die Formel in bekannter Weise bei der Partialbruchzerlegung.

Genügt eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ den Bedingungen (40.), so ist

$$(59.)\quad f(x) = \sum_k u(\lambda_k^2, x) \int_0^1 \frac{v(\lambda_k^2, z) g(z)\, dz}{\lambda_k^2} = \sum u(\lambda_k^2, x) \int_0^1 v(\lambda_k^2, z) f(z)\, dz;$$

genügt $f(x)$ den Bedingungen (42.), so ist

$$(60.)\quad f(x) = \sum_k v(\lambda_k^2, x) \int_0^1 \frac{u(\lambda_k^2, z) g(z)\, dz}{\lambda_k^2} = \sum v(\lambda_k^2, x) \int_0^1 u(\lambda_k^2, z) f(z)\, dz.$$

Die Bedingungen, denen $f(x)$ genügen muß, lassen sich beschränken, wir führen dies jedoch nur im Falle I explizite durch.

§ 3. Vereinfachung der Voraussetzungen über die zu entwickelnden Funktionen.

Man hat im Falle I:

$$(61.)\quad \frac{d}{dx} V(0; x, y) = \sum_k \frac{u(\lambda_k^2, y) v'(\lambda_k^2, x)}{\lambda_k^2}, \text{ wenn } x \gtrless y,$$

$$(62.)\quad \frac{d}{dy} V(0; x, y) = \sum_k \frac{u'(\lambda_k^2, y) v(\lambda_k^2, x)}{\lambda_k^2}, \text{ wenn } x \gtrless y,$$

$$(63.)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz} V(0; z, x)\right)_{z=x+0} + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz} V(0; z, x)\right)_{z=x-0} = \sum_k \frac{u(\lambda_k^2, x) v'(\lambda_k^2, x)}{\lambda_k^2},$$

wenn $0 < x < 1$,

$$(64.)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz} V(0; x, z)\right)_{z=x+0} + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz} V(0; x, z)\right)_{z=x-0} = \sum_k \frac{u'(\lambda_k^2, x) v(\lambda_k^2, x)}{\lambda_k^2},$$

wenn $0 < x < 1$,

$$(65.)\qquad \frac{v_3(0, x)}{N(0)} = \sum_k \frac{v(\lambda_k^2, x)}{\lambda_k^2}.$$

Diese Formeln erhält man wiederum durch wiederholte Anwendung des *Cauchy*schen Satzes.

Wir betrachten abermals nach dem Vorgange des Herrn *Kneser*, wenn $f(x)$ im Intervalle a, b zweimal stetig differenzierbar ist:

$$(66.)\quad S_k = u(\lambda_k, x)\int_a^b f(y)v(\lambda_k, y)\,dy; \quad T_k = v(\lambda_k, x)\int_a^b f(y)u(\lambda_k, y)\,dy.$$

Wir formen diese beiden Ausdrücke vermittelst der Differentialgleichungen (3.) und (4.), (24.) und (35.) um. Es ist

$$(67.)\quad S_k = -\frac{u(\lambda_k^2, x)}{\lambda_k^2}\int_a^b f(y)[v''(\lambda_k^2, y) + q(y)v(\lambda_k^2, y)]\,dy$$

$$= -\frac{u(\lambda_k^2, x)}{\lambda_k^2}[v'(\lambda_k^2, y)f(y) - f'(y)v(\lambda_k^2, y)]_a^b$$

$$- \frac{u(\lambda_k^2, x)}{\lambda_k^2}\int_a^b v(\lambda_k^2, y)\,(f''(y) + q(y)f(y))\,dy;$$

$$(68.)\quad T_k = -\frac{v(\lambda_k^2, x)}{\lambda_k^2}\int_a^b f(y)[u''(\lambda_k^2, y) + q(y)u(\lambda_k^2, y) - K(y)]\,dy$$

$$= -\frac{v(\lambda_k^2, x)}{\lambda_k^2}[u'(\lambda_k^2, y)f(y) - f'(y)u(\lambda_k^2, y)]_a^b$$

$$- \frac{v(\lambda_k^2, x)}{\lambda_k^2}\int_a^b [u(\lambda_k^2, y)\,(f''(y) + q(y)f(y)) - K(y)f(y)]\,dy.$$

Also

$$(69.)\quad \sum_k S_k = -\Big[\sum_k \frac{u(\lambda_k^2, x)v'(\lambda_k^2, y)}{\lambda_k^2} f(y)\Big]_{y=a}^{y=b} + [f'(y)V(0; y, x)]_{y=a}^{y=b}$$

$$- \int_a^b V(0; y, x)\,(f''(y) + q(y)f(y))\,dy.$$

Aber

$$(70.)\quad -\int_a^b V(0; y; x)f''(y)\,dy = -[f'(y)V(0; y, x)]_{y=a}^{y=b}$$

$$+ \Big[f(y)\frac{d}{dy}V(0; y, x)\Big]_{y=a}^{y=b} - \int_a^b f(y)\frac{d^2}{dy^2}V(0; y, x)\,dy,$$

$$(71.)\quad -\int_a^b f(y)\frac{d^2}{dy^2}V(0; y, x)\,dy = \int_a^b V(0; y, x)\,q(y)f(y)\,dy.$$

Durch Addition folgt

$$(72.)\quad \Sigma S_k = -\Big[\sum_k \frac{u(\lambda_k^2, x)v'(\lambda_k^2, y)}{\lambda_k^2} f(y)\Big]_{y=a}^{y=b} + \Big[f(y)\frac{d}{dy}V(0; y, x)\Big]_a^b.$$

Analog hat man

$$(73.)\quad \Sigma T_k = -\Big[\sum_k \frac{v(\lambda_k^2, x)u'(\lambda_k^2, y)}{\lambda_k^2} f(y)\Big]_{y=a}^{y=b} + [f'(y)V(0; x, y)]_{y=a}^{y=b}$$

$$- \int_a^b \Big[V(0; x, y)\,(f''(y) + q(y)f(y)) - \frac{f(y)K(y)v_3(0, x)}{N(0)}\Big]\,dy.$$

Aber

$$(74.)\quad -\int_a^b V(0;x,y)f''(y)\,dy = -[f'(y)V(0;x,y)]_{y=a}^{y=b} + \Big[f(y)\frac{d}{dy}V(0;x,y)\Big]_{y=a}^{y=b} - \int_a^b f(y)\frac{d^2}{dy^2}V(0;x,y)\,dy,$$

$$(75.)\quad -\int_a^b f(y)\frac{d^2}{dy^2}V(0;x,y)\,dy = \int_a^b f(y)\Big[q(y)V(0;x,y) - \frac{K(y)v_3(0,x)}{N(0)}\Big]dy.$$

Durch Addition wird

$$(76.)\quad \Sigma T_k = -\Big[\sum_k \frac{v(\lambda_k^2,x)\,u'(\lambda_k^2,y)}{\lambda_k^2}f(y)\Big]_{y=a}^{y=b} + \Big[f(y)\frac{d}{dy}V(0;x,y)\Big]_{y=a}^{y=b}.$$

Diese Formeln gelten im Falle I, wenn nicht x und y gleichzeitig in einen Randpunkt hineinfallen.

Liegt x außerhalb des Intervalles a, b, so folgt aus (61.) und (62.):

$$(77.)\qquad \Sigma S_k = 0, \quad \Sigma T_k = 0.$$

Liegt x im Inneren von a, b, so zerlegen wir das Intervall in a, x und x, b. Dann wird nach (63.):

$$(78.)\quad \sum_k S_k(a,x) = f(x-0)\,\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{d}{dz}V(0;z,x)\Big)_{z=x-0} - \Big(\frac{d}{dz}V(0;z,x)\Big)_{z=x+0}\Big] = \frac{1}{2}f(x-0),$$

$$(79.)\qquad \sum_k S_k(x,b) = \frac{1}{2}f(x+0),$$

wenn $S_k(a,x)$ bedeutet, daß statt a, b das Intervall a, x gewählt ist.

Ebenso folgt

$$(80.)\qquad \sum_k T_k(a,x) = \frac{1}{2}f(x-0),$$

$$(81.)\qquad \sum_k T_k(b,x) = \frac{1}{2}f(x+0).$$

Daraus folgt die Gültigkeit der Entwicklungen im Falle I für $0 < x < 1$, wenn wir nur voraussetzen, daß $f(x)$ stückweise zweimal stetig differenzierbar ist, und wenn wir statt $f(x)$ auf der linken Seite

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2}\,(f(x+0) + f(x-0))$$

setzen. In den anderen Fällen geht die Untersuchung analog; auf die dabei auftretenden notwendigen Abänderungen der Entwicklungen (vgl. Kap. I, § 4) soll der Kürze wegen nicht eingegangen werden.

Elementar-geometrische Ableitung der Additionstheoreme der elliptischen Funktionen.

Von Herrn *P. Kokott* in Neiße.

Wenn sich im Kreise M, dessen Radius gleich Eins sein möge, zwei Sehnen AA' und BB' schneiden, so entsteht eine dreieckähnliche Figur ABC mit den Winkeln α, β, γ, deren Summe größer als π ist. Man wähle nun eine Größe $\varkappa$ so, daß

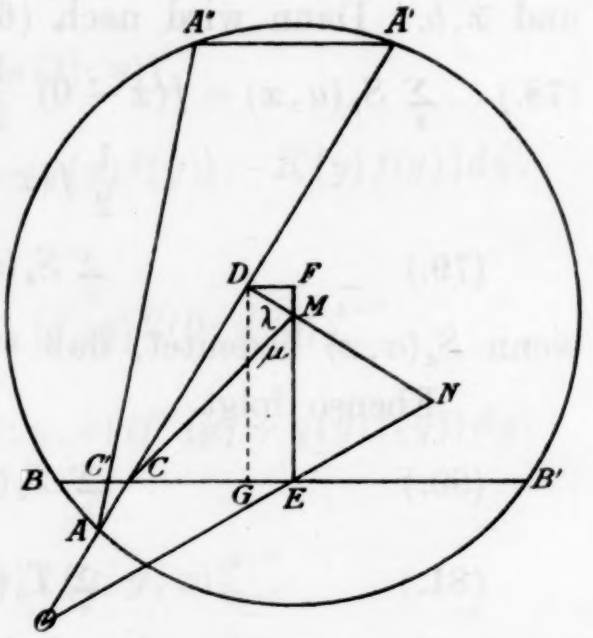
$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\gamma} = -\cos\gamma$$

wird. Es ergibt sich dann

$$\varkappa^2 = \frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}$$

oder, da $MD = \cos\alpha$, $ME = \cos\beta$ und $ED = CM\sin\gamma$ ist,

$$\varkappa^2 = \frac{1-CM^2}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$



Offenbar ist der Zähler die Potenz P des Punktes C in bezug auf den Kreis M, so daß als einfachster Ausdruck entsteht

$$\varkappa^2 = \frac{P}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Führt man jetzt eine elliptische Funktion $\varphi = \mathrm{am}(u)$ ein, definiert durch die Gleichung

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},$$

so besteht zwischen den Argumenten $(a), (b)$ und (c) der Winkel α, β, γ die Beziehung $(a)+(b)+(c) = 2K$, wo K das vollständige Integral zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$ bedeutet. Für $EMD = \sigma$ ist dann $\sigma = \mathrm{am}(a+b)$. Die

Linie CM teilt σ in die Winkel λ und μ, deren Eigenschaften die Additionstheoreme vermitteln werden. Vorher ist es noch nötig, die Linien CD und CE auszudrücken. Da $AD = A'D = \sin\alpha$ ist, so kann die Potenz P auch durch $(\sin\alpha + CD)(\sin\alpha - CD)$ dargestellt werden. Man erhält also $\varkappa^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta = \sin^2\alpha - CD^2$ oder $CD = \sin\alpha\, \Delta\beta$, ebenso $CE = \sin\beta\, \Delta\alpha$. Für CM ergibt sich in gleicher Weise der Wert $\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta}$. Bildet man jetzt $\sin\sigma = \sin\lambda\cos\mu + \sin\mu\cos\lambda$, so wird

$$\sin\sigma = \frac{CD \cdot ME + CE \cdot MD}{CM^2} = \frac{\sin\alpha\cos\beta\,\Delta\beta + \sin\beta\cos\alpha\,\Delta\alpha}{1 - \varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\beta};$$

ebenso

$$\cos\sigma = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,\Delta\alpha\,\Delta\beta}{1 - \varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Weniger gebräuchliche Formeln entstehen für $\sin\sigma$ durch Anwendung des Ptolemäischen Satzes auf das Diagonalverhältnis $DE : CM$

$$\sin\sigma = \frac{DM \cdot EM + CD \cdot CE}{DM \cdot CD + EM \cdot CE} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,\Delta\alpha\,\Delta\beta}{\cos\alpha\sin\alpha\,\Delta\beta + \cos\beta\sin\beta\,\Delta\alpha},$$

für $\cos\sigma$ aus der Identität

$$\cos\sigma = \frac{\sin\lambda\cos\lambda - \sin\mu\cos\mu}{\sin\lambda\cos\mu - \sin\mu\cos\lambda} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta\beta - \sin\beta\cos\beta\,\Delta\alpha}{\sin\alpha\cos\beta\,\Delta\beta - \sin\beta\cos\alpha\,\Delta\alpha}.$$

Aus einer späteren Bemerkung wird man erkennen, wie man hieraus leicht die entsprechenden Formeln für $\Delta\sigma$ ableiten kann.

Es soll nunmehr das System von Gleichungen, das *Jacobi* in seiner berühmten Schrift über die Rotation eines festen Körpers aufgestellt hat, geometrisch entwickelt werden. Zunächst mögen jedoch einige Bemerkungen Platz finden, die für die Umwandlung einer Form in die andere wichtig sind.

Wegen der Relation $(a) + (b) + (c) = 2K$ ist es algebraisch klar, daß in jeder irgendwie erhaltenen Formel die Winkel α, β und γ miteinander vertauscht werden können. Die Figur veranschaulicht diese Symmetrie. Zieht man nämlich $A'A''$ parallel BB', so entsteht ein Sektor ABC' mit den Winkeln γ, β und α, also mit denselben Winkeln nur in anderer Lage. Ebenso gibt es auf AA' einen Punkt C'' mit analogen Eigenschaften; der Modul $\varkappa$ bleibt hierbei unverändert.

Man denke sich ferner durch C zwei Sehnen gezogen, deren Entfernungen vom Mittelpunkte $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ sind. Solche Sehnen gibt es stets, da $\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$, d. h. CM, größer als $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ ist. Es

entsteht dann ein Sektor mit den Winkeln α', β' und γ', der mit dem ersten so zusammenhängt, daß $\cos\alpha' = \Delta\alpha$, $\cos\beta' = \Delta\beta$, $\sin\alpha' = \varkappa \sin\alpha$, $\sin\beta' = \varkappa \sin\beta$, $\lambda^2 = \frac{P}{\sin^2\alpha' \sin^2\beta'} = \frac{1}{\varkappa^2}$, $\Delta\alpha' = \cos\alpha$, $\Delta\beta' = \cos\beta$ ist. Für die Argumente gelten die Beziehungen $(a') = \varkappa(a)$, $(b') = \varkappa(b)$, $(c') = \varkappa(c)$. Da nun die geometrischen Eigenschaften aller Sektoren dieselben sind, so kann man jede auf Grund der unmittelbaren Anschauung gewonnene Formel durch die vorstehenden Substitutionen von einem Sektor auf den andern übertragen. Hierdurch erhält man z. B. aus den Formeln für $\cos\sigma$ sofort die analogen Ausdrücke für $\Delta\sigma$.

Die Figur lehrt nun, daß $ME + MF = CD \sin\gamma$ ist. Daraus folgt

$$\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma = \Delta\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Vertauscht man hierin die Winkel zyklisch miteinander und ersetzt $\cos\gamma$ durch $-\cos\sigma$, so entsteht

$$\sin\alpha \sin\beta \Delta\sigma + \cos\sigma = \cos\alpha \cos\beta,$$

$$\cos\beta \cos\sigma + \Delta\alpha \sin\beta \sin\sigma = \cos\alpha, \quad \cos\alpha \cos\sigma + \Delta\beta \sin\alpha \sin\sigma = \cos\beta.$$

Es ist

$$CG = CE - DF,$$

oder

$$\Delta\beta \sin\alpha \cos\gamma = \Delta\alpha \sin\beta - \cos\alpha \sin\gamma.$$

Hieraus ergibt sich

$$\Delta\alpha \sin\beta \cos\sigma - \cos\beta \sin\sigma = -\sin\alpha \Delta\beta, \quad \Delta\beta \sin\alpha \cos\sigma - \cos\alpha \sin\sigma = -\sin\beta \Delta\alpha,$$

$$\sin\alpha \cos\sigma - \Delta\beta \cos\alpha \sin\sigma = -\sin\beta \Delta\sigma, \quad \sin\beta \cos\sigma - \Delta\alpha \cos\beta \sin\sigma = -\sin\alpha \Delta\sigma,$$

$$-\sin\alpha \cos\beta \Delta\sigma + \Delta\alpha \sin\sigma = \cos\alpha \sin\beta, \quad -\sin\beta \cos\alpha \Delta\sigma + \Delta\beta \sin\sigma = \cos\beta \sin\alpha.$$

Überträgt man die erste Gruppe von Formeln auf den Sektor mit den Winkeln α', β', γ' und ersetzt die Funktionen dieser Winkel durch die Funktionen von α, β, γ, so wird

$$\Delta\sigma + \varkappa^2 \sin\alpha \sin\beta \cos\sigma = \Delta\alpha \Delta\beta,$$

$$\Delta\beta \Delta\sigma + \varkappa^2 \cos\alpha \sin\beta \sin\sigma = \Delta\alpha,$$

$$\Delta\alpha \Delta\sigma + \varkappa^2 \cos\beta \sin\alpha \sin\sigma = \Delta\beta.$$

Die noch fehlenden vier Gleichungen leitet man durch einfache algebraische Umrechnungen her. Die entsprechenden Ausdrücke für $\delta = \operatorname{am}(a - b)$ kann man sich ebenfalls leicht veranschaulichen, wenn man durch C die zu AA' symmetrisch gelegene Sehne zieht; der dazu gehörige Modul ändert sich dadurch nicht. Auch andere, sonst nicht einfach zu beweisende

Formeln erkennt man ohne Mühe an der Figur. Als Beispiel diene die von *Schellbach* mit Hilfe von Thetafunktionen entwickelte Gleichung für $\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}$. (*Enneper*, Ell. Funct. S. 184.)

Man verlängere DM um ME bis N, verbinde N mit E und bringe es mit DC zum Schnitt. Dann ist, wie man leicht sieht, $CE = CO$, also $DO = \sin\alpha\,\Delta\beta + \sin\beta\,\Delta\alpha$; im rechtwinkligen Dreieck ODN ist daher

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \frac{\sin\alpha\,\Delta\beta + \sin\beta\,\Delta\alpha}{\cos\beta + \cos\alpha}.$$

Trägt man ME auf MD ab, so ergibt sich

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \frac{\sin\alpha\,\Delta\beta - \sin\beta\,\Delta\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}.$$

Man wende nicht ein, daß die Relationen nur Gültigkeit haben, solange α und β bestimmte Werte besitzen. Vielmehr ist es sehr wohl möglich, den Winkeln und damit den Argumenten einen, wenn auch beschränkten, Spielraum zu gestatten. Hält man $\varkappa$ und α fest, so kann man β alle Werte zwischen $\frac{\pi}{2}$ und Null geben, d. h. (b) zwischen K und Null schwanken lassen. Man braucht dann nur C auf der Sehne $A'A$ so weit zu verschieben, daß $P = \varkappa^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta$ wird. Hierbei ist es gleichgültig, ob $\varkappa \gtrless 1$ ist, da man jederzeit einen Sektor mit reziprokem Modul finden kann. Entnimmt man dann aus einer Figur, in welcher BB' durch M geht, die Eigenschaften von $\operatorname{sn}(a+K)$, $\operatorname{cn}(a+K)$, $\operatorname{dn}(a+K)$, so kann man diese Funktionen im Raume K bis $2K$ erforschen und so weiter gehend den ganzen reellen Bereich bis $4K$ erschöpfen.

Übrigens ergibt sich aus folgender Betrachtung leicht, daß die Darstellung denselben Wert besitzt, wie ihn das sphärische Dreieck gewährt. Man denke sich ein Kugeldreieck so gestellt, daß eine Ecke den Nordpol der Kugel bildet. Legt man nun die Äquatorebene und verbindet alle Punkte des Dreiecks mit dem Südpol, so bilden sich offenbar die Scheitelkreise in geraden Linien, die dritte Seite aber in einem Kreise auf der Ebene ab; der betrachtete Sektor ist also das stereographische, isogonale Bild des Kugeldreiecks. Die ebene Figur ist sogar noch etwas allgemeiner, da der dritte Kreis auf der Kugel nicht gerade ein größter Kugelkreis zu sein braucht. Die Betrachtungen bleiben im wesentlichen dieselben, wenn C außerhalb des Kreises liegt; der Modul $\varkappa$ wird dann imaginär.

Zum Schluß möge noch eine elementare Aufgabe behandelt werden, die sich auf Grund der vorstehenden Auseinandersetzungen sofort lösen läßt. „Innerhalb (oder außerhalb) eines Kreises ist ein Punkt gegeben; man soll durch ihn zwei Sehnen so zeichnen, daß der entstehende Sektor gleiche Winkel hat.“ Es ist hier $(a) = (b) = (c) = \frac{2K}{3}$; also besteht für $x = \sin\alpha$ die Gleichung

$$\varkappa^4 x^8 - 6\varkappa^2 x^4 + 4(1+\varkappa^2)x^2 - 3 = 0.$$

Da $\varkappa^2 = \frac{P}{x^4}$ ist, so erhält man

$$4x^4 - x^2(3 + 6P - P^2) + 4P = 0.$$

Eine aus der Zeichnung leicht erkennbare Gleichung für α lautet

$$\cos\alpha = \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-P}.$$

Diese stimmt mit der obigen Gleichung in x überein, sobald man sie rational macht.

Beiträge zur Behandlung spezieller Variationsprobleme; Untersuchung konjugierter kinetischer Brennpunkte.

Von Herrn *Hermann Kober* in Breslau.

Es sei $F(x, y, x', y')$ eine bekannte Funktion der Variablen x, y, $x' = dx/dt$, $y' = dy/dt$, homogen vom ersten Grade in bezug auf x', y'. Die Größen x und y sind unbekannte Funktionen des Parameters t und sollen so bestimmt werden, daß das Integral

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt$$

ein Extremum wird.

Damit eine Lösung dieser einfachsten Aufgabe der Variationsrechnung, eine „Extremale", in der Tat ein Extremum liefert, darf der Extremalenbogen, den wir betrachten, keine konjugierten Punkte enthalten*). In der folgenden Arbeit sollen einige Beispiele für konjugierte Punkte behandelt werden, und zwar bei einigen Variationsproblemen, die sich durch das Prinzip der kleinsten Aktion bei der Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse konservativer Kräfte ergeben. Es sei U das Potential der wirkenden Kräfte als eine Funktion der Koordinaten des materiellen Punktes gegeben, h sei die Energiekonstante, ds das Wegelement, dann ist die Bahnkurve des Punktes eine Lösung des Variationsproblemes

$$\delta \int \sqrt{U + h}\, ds = 0.$$

Konjugierte Punkte heißen hier nach *Thomson* und *Tait* „konjugierte kinetische Brennpunkte". Ihr Vorhandensein ist ein Kriterium für die Stabilität der Bewegung**).

---

*) *Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung, S. 43, 44.

**) *Thomson* and *Tait*, Treatise on natural philosophy, art. 346.

Die wirkende Kraft sei eine Zentralkraft, d. h. U eine Funktion allein des Radiusvektors r; dann ist die Frage der konjugierten Punkte sowie die Stabilität der Bewegung und die Gestalt der Enveloppen aller durch einen Punkt gehenden Extremalen vollständig behandelt worden in allen Fällen, in denen U eine beliebige ganze Potenz von r ist*). Im Falle $U = \pm \frac{1}{r}$ und $U = \pm r^2$ ergeben sich besonders einfache Resultate. Der letztere soll daher hier behandelt werden.

Es sollen hier ferner konjugierte Punkte und Enveloppen untersucht werden in gewissen Fällen $U = \pm y^n$, wenn also die wirkende Kraft von einer Geraden ausgeht und eine Potenz des Abstandes des materiellen Punktes von der Geraden ist. Der Fall $U = -y$ ergibt als Bahnkurven Wurfparabeln. Die Lage von konjugierten Punkten zueinander und die Gestalt der Enveloppen ist in der Literatur hinreichend bearbeitet. Ähnliche Resultate ergibt der Fall $U = +y$. Hier sollen die Fälle $U = \frac{1}{y^2}$ und $U = -\frac{1}{y^2}$ erledigt werden. — Zum Schlusse soll bei einer bereits anderweitig behandelten Enveloppe nachgewiesen werden, daß sie gegen einen Punkt konkav ist.

I. $U = -r^2$.

Es seien a, φ_0 willkürliche Integrationskonstante, r und φ seien Polarkoordinaten, h die Energiekonstante; dann lautet die Gleichung einer Bahnkurve

$$2a^2 = r^2[h + \sqrt{h^2 - 4a^2}\cos 2(\varphi - \varphi_0)].$$

Führe ich durch die Substitution $x = r\cos(\varphi - \varphi_0)$, $y = r\sin(\varphi - \varphi_0)$ kartesische Koordinaten ein, setze ich ferner

$$\alpha^2 = \frac{2a^2}{h + \sqrt{h^2 - 4a^2}}, \quad \beta^2 = \frac{2a^2}{h - \sqrt{h^2 - 4a^2}},$$

so erhalte ich

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Die Bahnkurven sind also Ellipsen; da ferner

$$\alpha^2 + \beta^2 = h,$$

so ist die Gesamtheit aller Extremalen identisch mit der Gesamtheit aller Ellipsen, die das Kraftzentrum zum Mittelpunkte haben und für deren Halbachsen die Summe der Quadrate gleich h ist.

---

*) *Kober*, Konjugierte kinetische Brennpunkte, Inaugural-Dissertation, Breslau 1910.

Konjugierte Punkte sind solche, in denen sich zwei benachbarte Bahnkurven schneiden. Ich untersuche also die Schnittpunkte einer Kurve mit einer unendlich nahen. Ich setze $\alpha^2 = u$, dann ist $\beta^2 = h - u$. Die Gleichung einer Bahnkurve lautet

(1.) $$x^2 h + u(y^2 - x^2) - uh + u^2 = 0.$$

Die Gleichung einer unendlich nahen ist

(2.) $$x^2 h + u(y^2 - x^2) - uh + u^2 + du(y^2 - x^2 + 2u - h) + d\varphi_0(2hxy - 4uxy) = 0.$$

Die Kurvengleichung (1.) enthält nämlich außer dem einen Parameter u noch den zweiten φ_0, da die Lage des Koordinatensystems und somit x und y von φ_0 abhängen, und es ist

$$x = r \cdot \cos(\varphi - \varphi_0), \quad y = r \cdot \sin(\varphi - \varphi_0), \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi_0} = +y, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi_0} = -x.$$

Für die Schnittpunkte zweier benachbarter Kurven folgt daher aus (1.) und (2.) die Gleichung

$$\frac{d\varphi_0}{du}(4u - 2h) = \frac{y^2 - x^2 + 2u - h}{xy}.$$

Ist jetzt der eine Schnittpunkt $P_1(x_1, y_1)$ gegeben, so ist

$$\frac{d\varphi_0}{du}(4u - 2h) = \frac{y_1^2 - x_1^2 + 2u - h}{x_1 y_1} = c$$

eine bekannte Größe. Daher ergibt sich aus den beiden Gleichungen für alle Schnittpunkte der Kurven die Beziehung

(3.) $$y^2 - x^2 + \alpha^2 - \beta^2 = c \cdot xy, \text{ da } 2u - h = 2\alpha^2 - (\alpha^2 + \beta^2) = \alpha^2 - \beta^2.$$

Durch die Gleichung (3.) ist auf der Kurve (1.) der zu P_1 konjugierte Punkt festgelegt.

Zur geometrischen Interpretation stelle ich die Gleichung der Kurve in Parameterform dar:

$$x = \alpha \cos t, \; y = \beta \sin t, \qquad -\pi \leqq t < +\pi.$$

Dann geht Gleichung (3.) über in

(4.) $$\operatorname{tang}^2 t - \frac{c\beta}{\alpha} \operatorname{tang} t - \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\operatorname{tang} t$. Ihre Wurzeln seien $\operatorname{tang} t_1$ und $\operatorname{tang} t_2$. In dem Intervalle $-\pi \leqq t < \pi$ entsprechen jedem Werte von $\operatorname{tang} t$ zwei Werte von t, die sich um π unterscheiden. Wenn daher $\operatorname{tang} t_1$ und $\operatorname{tang} t_2$ reell sind, ergeben sich für t vier Werte, $t_1, t_1' = t_1 + \pi, t_2, t_2' = t_2 + \pi$. Da der Punkt $P_1(x_1, y_1)$ auf der Kurve reell gegeben ist, so ist t_1, t_1' stets reell, dann aber auch t_2 und t_2'. Zu jedem Punkte P_1 existieren daher

stets genau zwei konjugierte Punkte, einer nach rechts hin, einer nach links:

$$P_2(x_2 = \alpha \cos t_2,\ y_2 = \beta \sin t_2),\quad P_2'(x_2' = \alpha \cos t_2',\ y_2' = \beta \sin t_2').$$

Da $t_2' = t_2 + \pi$, so sind die Punkte P_2 und P_2' symmetrisch in bezug auf den Mittelpunkt O. Der Punkt P_1', der zu P_1 in bezug auf O symmetrisch liegt, ist nicht zu P_1 konjugiert, da er, von ihm durch P_2 bzw. P_2' getrennt wird.

Aus Gleichung (4.) folgt

$$\text{(5.)} \qquad \text{tang } t_1 \cdot \text{tang } t_2 = -\frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

setze ich also

$$x_1 = \alpha \cos t_1,\ y_1 = \beta \sin t_1,\ x_2 = \alpha \cos t_2,\ y_2 = \beta \sin t_2,$$

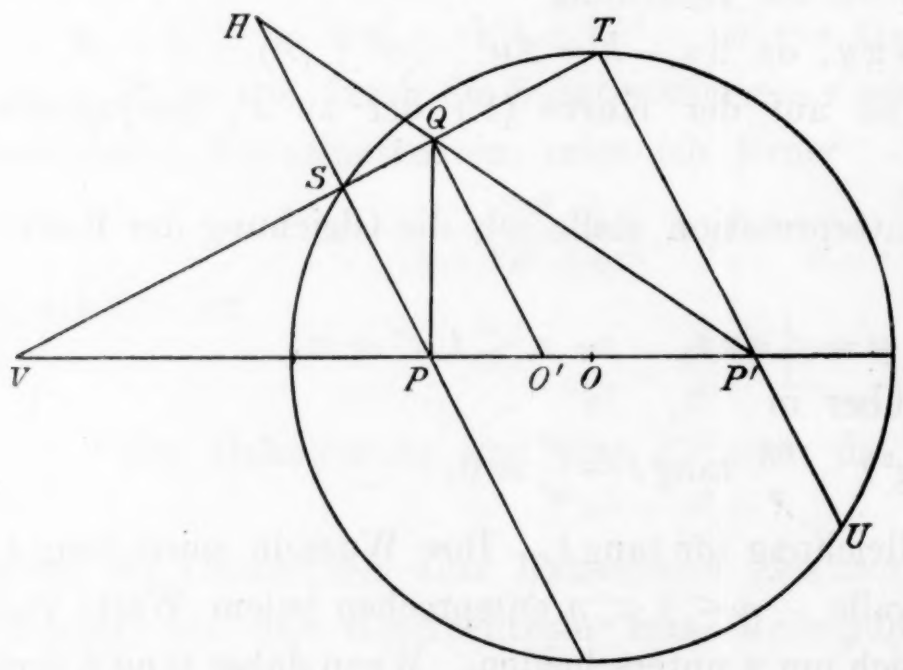
so folgt

$$\text{(6.)} \qquad \alpha^4 y_1 y_2 + \beta^4 x_1 x_2 = 0.$$

Diese Gleichung bedeutet aber, daß die in den Punkten P_1, P_2 an die Ellipse gelegten Tangenten aufeinander senkrecht stehen.

Wir erhalten somit das einfache Resultat:

Tangenten, die man in zwei zueinander konjugierten Punkten an die Ellipse legt, stehen aufeinander senkrecht und schneiden sich daher auf Grund eines Kegelschnittsatzes auf dem um das Zentrum O mit dem Radius $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{h}$ beschriebenen Kreise.



Dieser Kreis ist für alle Extremalen derselbe, er ist die „Grenzkurve" des mechanischen Problems.

Es soll jetzt die Enveloppe aller Extremalen bestimmt werden, die durch einen festen Punkt P gehen, und zwar geometrisch.

Ich beschreibe um O mit $\sqrt{h}$ den Kreis und denke mir die Extremale festgelegt, die die Gerade PS in P berührt; sie muß, da sie O zum Mittelpunkte hat, auch durch P' gehen, den zu P in bezug auf O symmetrischen Punkt, und die durch P' zu PS gezogene Parallele $P'T$ in P' berühren. U sei

der zweite Schnittpunkt von $P'T$ mit dem Kreise. Da $PO = P'O$, $PS \parallel P'U$, so ist SU ein Durchmesser und $ST \perp PS$, $ST \perp P'T$.

Da ferner Tangenten in konjugierten Punkten aufeinander senkrecht stehen und sich auf der Grenzkurve schneiden, so muß Q, der zu P konjugierte Punkt, auf TS liegen und muß ferner der vierte harmonische Punkt sein zu T, S und V, dem Schnittpunkte von PP' mit ST. Denn bei einer Ellipse wird das Stück einer Tangente, das zwischen zwei anderen Tangenten (PS und $P'T$) liegt, durch deren Berührungssehne (PP') und den Berührungspunkt harmonisch geteilt. Ziehe ich QO' parallel zu PS, so sind auch die Punkte $PP'VO'$ vier harmonische Punkte; da ferner $\sphericalangle O'QV$ ein rechter ist, so halbiert der Strahl QO' den Winkel $P'QP$; schneide ich PS mit $P'Q$ in H, so folgt die Kongruenz der Dreiecke PQS und HQS, es ist daher

$$QP = QH;$$

da ferner $P'H = 2OS = 2\sqrt{h}$, so folgt

$$QP' + QP = 2\sqrt{h}.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß Q, der zu P konjugierte Punkt, eine Ellipse beschreibt. Die Enveloppe aller durch einen festen Punkt P gehenden Extremalen ist daher eine Ellipse, deren Brennpunkte P und der zu P in bezug auf O symmetrische Punkt sind, deren halbe große Achse gleich $\sqrt{h}$ ist.

Der Fall $U = +v^2$, der ähnliche Resultate ergibt, ist in der oben erwähnten Arbeit des Verfassers ausführlich behandelt.

II. $U = +y^{-2}$.

Aus $\delta \int \sqrt{U + h}\, ds = 0$ ergibt sich, wenn ich mit a, x_0 Integrationskonstanten bezeichne, als Gleichung einer Bahnkurve

$$(x - x_0)^2 \cdot \left(\frac{h - a^2}{a}\right)^2 - y^2 (h - a^2) = 1.$$

Ich unterscheide nun folgende Fälle:

(A.) $h - a^2 > 0$.

Die Bahnkurven sind Hyperbeln, deren halbe reelle Achse gleich α, deren halbe imaginäre Achse gleich β ist, wenn ich setze

$$\alpha = \frac{a}{h - a^2}, \quad \beta^2 = \frac{1}{h - a^2}.$$

Es ist dann

$$\alpha^2 = \beta^2(h\beta^2 - 1), \quad e^2 = h \cdot \beta^4,$$

wenn ich mit $2e$ den Abstand der Brennpunkte bezeichne.

Als wirkliche Bahnkurve kommt immer nur einer der beiden Hyperbelzweige in Betracht. Nehme ich etwa den rechten, so wird er durch die x-Achse in zwei Hälften zerschnitten. Da der Zweig in diesem Schnittpunkte im Sinne des Variationsproblems einen singulären Punkt hat — es ist dort $y = 0$, $\sqrt{U + h} = \sqrt{y^{-2} + h} = \infty$ —, so kommt von diesem Zweige für die Untersuchung der konjugierten Punkte nur die eine Hälfte, etwa die obere, in Betracht. Ich lege also auf den Teil

$$x - x_0 > 0, \quad y \geqq 0$$

den Punkt $P_1(x_1, y_1)$ und suche einen zu ihm konjugierten Punkt. Ich setze $\beta^2 = u$, dann ist

$$\alpha^2 = u(hu - 1),$$

die Gleichung der Bahnkurve lautet

$$(1.) \qquad (x - x_0)^2 - y^2(hu - 1) = hu^2 - u.$$

Es ist ferner, da P_1 auf der Kurve liegt,

$$(2.) \qquad (x_1 - x_0)^2 - y_1^2(hu - 1) = hu^2 - u.$$

Für die Schnittpunkte der Kurve mit einer unendlich nahen ergeben sich die Gleichungen

$$(x - x_0)\,2\,dx_0 + (hy^2 + 2hu - 1)\,du = 0,$$
$$(x_1 - x_0)\,2\,dx_0 + (hy_1^2 + 2hu - 1)\,du = 0;$$

daraus folgt

$$(3.) \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y^2 h + 2hu - 1}{y_1^2 h + 2hu - 1}.$$

Eliminiere ich aus Gleichung (3.) mit Hilfe von (1.) und (2.) y und y_1, so folgt schließlich

$$x - x_0 = \frac{(h\beta^2 - 1)^2}{h(x_1 - x_0)}, \quad y^2 = \frac{(h\beta^2 - 1)^3}{h^2(x_1 - x_0)^2} - \beta^2.$$

Dabei sind x, y die Koordinaten des zu P_1 konjugierten Punktes. Nun lautet die Gleichung der Kurve

$$\left(\frac{x - x_0}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = 1,$$

also ist

$$(x_1 - x_0)^2 \geqq \alpha^2 = \beta^2(h\beta^2 - 1), \text{ folglich } y^2 \leqq \frac{(h\beta^2 - 1)^2}{h^2\beta^2} - \beta^2 = \frac{1 - 2h\beta^2}{h^2\beta^2}.$$

Nun ist $h\beta^2-1=(\alpha/\beta)^2$, also $h\beta^2>1$, erst recht daher $2h\beta^2>1$, mithin ist $y^2<0, y$ imaginär. Es gibt daher hier keinen zu P_1 konjugierten Punkt.

(B.) $h-a^2<0$.

Die Bahnkurven sind Ellipsen, deren eine Achse die x-Achse ist. Ihre halben Achsen sind

$$\alpha=\frac{a}{a^2-h},\quad \beta=\sqrt{\frac{1}{a^2-h}};$$

es ist dann

$$\alpha^2=\beta^2(h\beta^2+1),\quad e^2=|h|\cdot\beta^4,$$

wobei $2e$ die Entfernung der Brennpunkte ist.

Durch die x-Achse wird die Ellipse in zwei Hälften zerschnitten; aus denselben Gründen wie oben kommt für die Untersuchung nur eine Hälfte, etwa die obere, in Betracht,

$$-\alpha\leqq x-x_0\leqq\alpha,\quad y\geqq 0.$$

Ich lege auf diesen Teil den Punkt $P(x_1, y_1)$. Dann ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichung $\alpha^2=\beta^2(h\beta^2+1)$ für die Koordinaten x, y des zu P konjugierten Punktes Q durch eine der vorigen analoge Rechnung die Werte

$$x=x_0+\frac{(h\beta^2+1)^2}{h(x_1-x_0)},\quad y^2=\beta^2-\frac{(h\beta^2+1)^3}{h^2(x_1-x_0)^2}.$$

Da $(x_1-x_0)^2\leqq\alpha^2=\beta^2(h\beta^2+1)$, so ist

$$y^2\leqq\beta^2-\frac{(h\beta^2+1)^2}{h^2\beta^2}=-\frac{2h\beta^2+1}{h^2\beta^2}.$$

Daher ist y imaginär, wenn $2h\beta^2+1>0$, d. i.

$$\frac{2h}{a^2-h}+1=\frac{a^2+h}{a^2-h}>0,\quad a^2+h>0.$$

Für $a^2+h>0$ gibt es also keinen zu P konjugierten Punkt. Ich betrachte daher den Fall

$$a^2+h<0.$$

In diesem Falle ist $h<0$, $\alpha<\beta$, die große Achse der Ellipse steht senkrecht zur x-Achse; e^2 ist gleich $-h\beta^4$. Für die Koordinaten x, y von Q ist

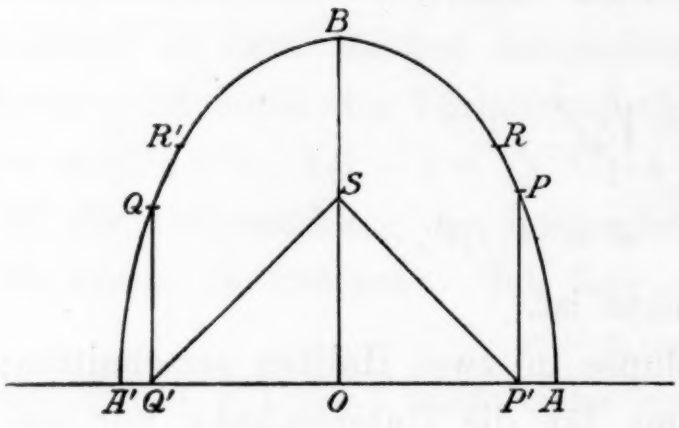
$$(x-x_0)(x_1-x_0)=\frac{(h\beta^2+1)^2}{h}=\frac{-\alpha^4}{e^2},\quad \frac{y^2}{\beta^2}=1-\frac{\alpha^6}{e^4(x_1-x_0)^2}.$$

y ist reell, wenn

$$|x_1-x_0|\geqq\frac{\alpha^3}{e^2}.$$

Solche Werte für $x_1 - x_0$ sind möglich, da aus der Ungleichung $a^2 + h < 0$ leicht folgt, daß $\alpha^3/e^2 < \alpha$ ist. Es treten hier konjugierte Punkte auf. Die Gleichung

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) = -\frac{\alpha^4}{e^2}$$



lehrt, daß sie auf verschiedenen Seiten der großen Achse liegen. Ich nenne die beiden Kurvenpunkte, deren Abszissen gleich

$$x_0 + \frac{\alpha^3}{e^2} \quad \text{bzw.} \quad x_0 - \frac{\alpha^3}{e^2}$$

sind, R und R'. Dann gibt es zu keinem Punkte zwischen R und R' einen konjugierten, da auf dem Bogen

$$RR' \text{ stets } |x_1 - x_0| < \frac{\alpha^3}{e^2}$$

ist. Für

$$x_1 - x_0 = \frac{\alpha^3}{e^2} \quad \text{folgt} \quad x - x_0 = -\alpha,$$

für

$$x_1 - x_0 = -\alpha \quad \text{folgt} \quad x - x_0 = -\frac{\alpha^3}{e^2}.$$

Das bedeutet aber:

Zu jedem Punkte des Bogens AR gibt es einen konjugierten. Bewegt sich P von A bis R, so wandert Q, der konjugierte Punkt, von R' bis A'.

Aus der Gleichung

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) = -\frac{\alpha^4}{e^2}$$

folgt eine einfache geometrische Konstruktion für konjugierte Punkte. Ich fälle von P und Q auf die x-Achse die Lote PP' und QQ', ich mache ferner die Strecke $SO = \alpha^2/e$, dann ist $\sphericalangle P'SQ' = 90^0$.

Um die Enveloppe der Extremalen zu finden, die durch den Punkt $P(x_1, y_1)$ gehen, eliminiere ich aus den Gleichungen

$$(x - x_0)^2 + (h\beta^2 + 1)\, y^2 = \beta^2 (h\beta^2 + 1),$$
$$(x_1 - x_0)^2 + (h\beta^2 + 1)\, y_1^2 = \beta^2 (h\beta^2 + 1),$$
$$h(x - x_0)(x_1 - x_0) = (h\beta^2 + 1)^2$$

die Größen β und x_0 und erhalte so als Gleichung der Enveloppe

$$\frac{(x - x_1)^2}{k^2 - y_1^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1.$$

Dabei ist $k^2 = -\frac{1}{h}$ gesetzt.

Die Enveloppe ist also eine Ellipse, welche P und seinen Bildpunkt in bezug auf die x-Achse zu Brennpunkten hat und die beiden Geraden $y = \pm k$ berührt.

Diese beiden Geraden bilden die Grenzkurve des mechanischen Problems.

III. $U = -y^{-2}$.

Als Bahnkurven ergeben sich hier Hyperbeln, deren imaginäre Achse die x-Achse ist:

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} = 1,$$

wobei

$$\alpha^2 = \beta^2(h\beta^2 - 1)$$

ist, h die Energiekonstante.

Damit $\sqrt{U+h}$ reell ist, muß $h > \frac{1}{y^2}$ sein, also

$$y^2 > \frac{1}{h}.$$

Die Hyperbeln befinden sich daher ganz außerhalb der Grenzkurve, welche gebildet wird von den beiden Geraden

$$y = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Für $Q(x, y)$, den zu $P(x_1, y_1)$ konjugierten Punkt, erhält man ähnlich wie im vorigen Falle

(1.) $$x - x_0 = -\frac{\alpha^4}{e^2(x_1 - x_0)},$$

(2.) $$y^2 = \beta^2 + \frac{(h\beta^2 - 1)^3}{h^2(x_1 - x_0)^2}.$$

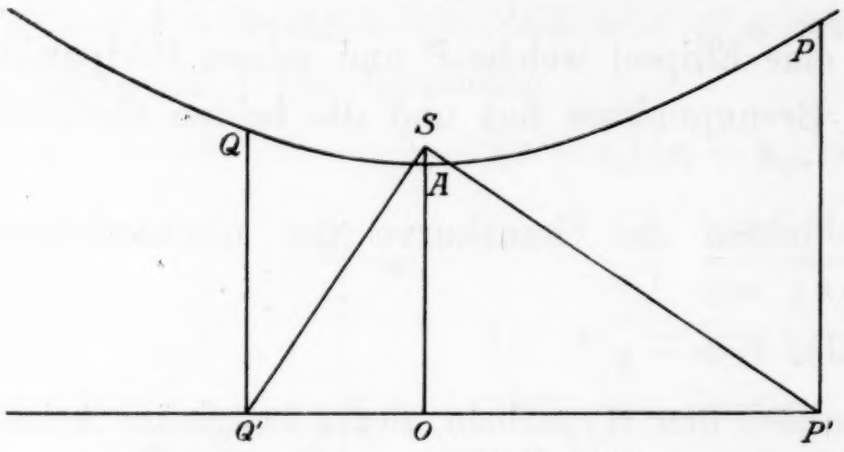
Da $h\beta^2 - 1 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} > 0$, so folgt:

y^2 ist stets positiv, y daher reell. Zu jedem Punkte $P(x_1, y_1)$ ist daher ein konjugierter vorhanden. Die Gleichung

(1.) $$(x - x_0)(x_1 - x_0) = -\frac{\alpha^4}{e^2}$$

lehrt, daß konjugierte Punkte auf verschiedenen Seiten der Geraden $x = x_0$ liegen; ferner, wenn $x_1 - x_0$ von ∞ bis 0 fällt, fällt $x - x_0$ von 0 bis $-\infty$. Wenn sich also der Punkt P auf der rechten Hälfte des Hyperbelzweiges von dem unendlich fernen bis zum tiefsten Punkte A bewegt, so wandert

der konjugierte Punkt Q von A auf der linken Hälfte bis zum unendlich fernen Punkte. Aus Gleichung (1.) ergibt sich auch hier eine einfache geometrische Konstruktion für konjugierte Punkte. Mache ich nämlich $SO = \frac{\alpha^2}{e}$, so ist $\sphericalangle Q'SP' = 90^0$.



Die Enveloppe erhalte ich durch Elimination von β, x_0 aus den drei Gleichungen

$$(x - x_0)\,(x_1 - x_0) = -\frac{(h\beta^2 - 1)^2}{h},$$
$$-(x - x_0)^2 + y^2(h\beta^2 - 1) = \beta^2(h\beta^2 - 1),$$
$$-(x_1 - x_0)^2 + y_1^2(h\beta^2 - 1) = \beta^2(h\beta^2 - 1).$$

So erhalte ich die Gleichung

$$\frac{y^2}{k^2} - \frac{(x - x_1)^2}{y_1^2 - k^2} = 1.$$

Dabei ist gesetzt

$$k^2 = \frac{1}{h}.$$

Die Enveloppe der Extremalen, die durch den Punkt P gehen, ist eine Hyperbel, deren Brennpunkte P und sein Bildpunkt in bezug auf die x-Achse sind. Sie berührt die Grenzkurve; ihre reelle Achse ist $2k = 2/\sqrt{h}$.

Zum Schlusse soll hier noch eine Ergänzung gebracht werden zu der oben erwähnten Arbeit des Verfassers. Dort ist in § 19, S. 68 bis 72, der Fall

$$U = \frac{1}{r^2}, \quad k = -h > 0$$

behandelt.

Die Gleichung einer Bahnkurve lautet

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_r^a \frac{dr\sqrt{1 - k\alpha^2}}{r\sqrt{k}\sqrt{\alpha^2 - r^2}}.$$

Dabei sind α, φ_0 willkürlich gewählte Integrationskonstanten.

Die Kurve ist eine zur Geraden $\varphi = \varphi_0$ symmetrische Doppelspirale, die sich dem Punkte O ständig nähert und ihn unendlich oft umkreist.

Als Enveloppe aller Extremalen, die durch den Punkt P gehen, dessen Koordinaten $r = c$, $\varphi = \varphi_1$ sind, ergibt sich eine zur Geraden $\varphi = \varphi_1$

symmetrische Doppelspirale, die sich von ihrem Apozentrum, dem Punkte $r = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $\varphi = \varphi_1$ aus nach beiden Seiten dem Punkte O beständig nähert und ihn unendlich oft umkreist.

Man gewinnt ihre Gleichung durch Elimination von α aus den Gleichungen

$$\text{(Ia.)} \qquad \varphi - \varphi_1 = \pm \left[\int_r^a \frac{du\sqrt{1-k\alpha^2}}{u\sqrt{k(\alpha^2-u^2)}} + \int_c^a \frac{du\sqrt{1-k\alpha^2}}{u\sqrt{k(\alpha^2-u^2)}} \right],$$

$$\text{(Ib.)} \qquad \frac{\alpha(1-k\alpha^2)}{\sqrt{\alpha^2-r^2}} + \frac{\alpha(1-k\alpha^2)}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} = \int_{\frac{r}{a}}^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} + \int_{\frac{c}{a}}^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}.$$

Es soll nun hier gezeigt werden, daß die Enveloppe gegen das Kraftzentrum O konkav ist.

Es ist längs der Enveloppe

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\mp\sqrt{1-k\alpha^2}}{r\sqrt{k(\alpha^2-r^2)}} \quad \text{(a. a. O., S. 70, Zeile 18 v. o.)},$$

$$r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2} = \frac{dr'}{dr} \cdot \frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\left(\frac{\partial r'}{\partial r} + \frac{\partial r'}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dr}\right),$$

wobei gesetzt ist

$$r' = \frac{dr}{d\varphi}.$$

Eine Kurve ist gegen den Punkt O konkav, wenn die Größe

$$K = r^2 + 2r'^2 - rr''$$

positiv ist.

Hier ergibt sich

$$K = \frac{r^2}{1-k\alpha^2}\left[1 - \frac{d\alpha}{dr} \cdot \frac{\alpha r k(1-kr^2)}{1-k\alpha^2}\right].$$

Die Größen $1-k\alpha^2$ und $\frac{d\alpha}{dr}$ sind, wie dort gezeigt wird, positiv, also ist auch K positiv, sobald

$$\frac{dr}{d\alpha} > \frac{\alpha r k(1-kr^2)}{1-k\alpha^2}.$$

Aus Gleichung (Ib.) folgt

$$\frac{dr}{d\alpha} = [\lambda(r,\alpha) + \lambda(c,\alpha)] : \frac{\alpha^3(1-kr^2)}{r(\sqrt{\alpha^2-r^2})^3}.$$

Dabei ist gesetzt die Funktion

$$\lambda(x,\alpha) = \frac{2k\alpha^2(\alpha^2-x^2) + \alpha^2(1-kx^2)}{(\sqrt{\alpha^2-x^2})^3} = \frac{\alpha^2(1-kx^2)}{(\sqrt{\alpha^2-x^2})^3} + \frac{2k\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}.$$

Auf Grund der Gleichung (Ib.) nehme ich folgende Umformung vor:

$$\lambda(r,\alpha) + \lambda(c,\alpha) = \mu(r,\alpha) + \mu(c,\alpha).$$

Dabei ist gesetzt

$$\text{II.}\qquad \mu(x,\alpha)=\frac{\alpha^2(1-kx^2)}{(\sqrt{\alpha^2-x^2})^3}+\frac{k\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}+\frac{k\alpha}{1-k\alpha^2}\int_{\frac{x}{a}}^{1}\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}.$$

Nun ist

$$\frac{\alpha^3(1-kr^2)}{r(\sqrt{\alpha^2-r^2})^3}\left[\frac{dr}{d\alpha}-\frac{kr\alpha(1-kr^2)}{1-k\alpha^2}\right]$$

$$=\mu(r,\alpha)+\mu(c,\alpha)-\frac{k\alpha^4(1-kr^2)}{(\sqrt{\alpha^2-r^2})^3}-\frac{k^2\alpha^4}{\sqrt{\alpha^2-r^2}}-\frac{k^3\alpha^4\sqrt{\alpha^2-r^2}}{1-k\alpha^2}.$$

Berücksichtige ich, daß

$$\int_{\frac{r}{a}}^{1}\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}=\alpha\int_{r}^{a}\frac{du}{u\sqrt{\alpha^2-u^2}},\quad \sqrt{\alpha^2-r^2}=\int_{r}^{a}\frac{u\,du}{\sqrt{\alpha^2-u^2}},$$

so geht die rechte Seite der Gleichung über in

$$\mu(c,\alpha)+\frac{\alpha^2(1-kr^2)(1-k\alpha^2)}{(\sqrt{\alpha^2-r^2})^3}+\frac{k\alpha^2(1-k\alpha^2)}{\sqrt{\alpha^2-r^2}}+\frac{k\alpha^2}{1-k\alpha^2}\int_{r}^{a}\frac{du(1-k^2\alpha^2u^2)}{u\sqrt{\alpha^2-u^2}}.$$

Dieser Ausdruck ist positiv; denn nach Gleichung (II.) ist $\mu(c,\alpha)\geqq 0$, es ist ferner $r\leqq\alpha$, $1-kr^2\geqq 1-k\alpha^2\geqq 0$ (S. 69 und 70 der oben erwähnten Arbeit), schließlich ist die Integrationsvariable $u\leqq\alpha$, also $1-k^2\alpha^2u^2\geqq 1-k^2\alpha^4\geqq 0$. Daher ist für $\alpha<\frac{1}{\sqrt{k}}$ auch der Ausdruck

$$\frac{dr}{d\alpha}-\frac{\alpha rk(1-kr^2)}{1-k\alpha^2}>0,$$

die Kurve ist daher gegen den Punkt O konkav*).

*) Diese Arbeit ist als eine Fortsetzung der oben erwähnten Abhandlung des Verfassers anzusehen. Die Anregung zur Behandlung der Probleme dieser Art erhielt ich durch Herrn Geheimrat *Kneser*, dem ich an dieser Stelle meinen Dank ausspreche.

Démonstration d'un théorème de *Tchébychef* généralisé.

Par M. *Demetrius Gravé* à Kiew.

1. Dans une note, lue le 18 janvier 1856 à l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, sur la construction des cartes géographiques, *Tchébychef* a donné sans démonstration la proposition suivante:

„D'après la notation de *Lagrange*, le rapport d'agrandissement s'exprime ainsi

$$m = \frac{\sqrt{F'(u+vi)F'_1(u-vi)}}{\frac{2}{e^u + e^{-u}}}, \quad i = \sqrt{-1},$$

ce qui donne

$$\lg m = \frac{1}{2}\lg F'(u+vi) + \frac{1}{2}\lg F'_1(u-vi) - \lg \frac{2}{e^u + e^{-u}},$$

où la partie positive, composée des fonctions arbitraires, n'est évidemment que l'intégrale de cette équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} = 0.$$

Donc les écarts du rapport d'agrandissement dépendent des déviations de la fonction $\lg \frac{2}{e^u + e^{-u}}$ et de l'intégrale de cette équation.

Or, d'après les propriétés remarquables de cette équation on parvient à reconnaître que le minimum de déviation de son intégrale de la fonction $\lg \frac{2}{e^u + e^{-u}}$ dans l'espace limité par une courbe quelconque ne peut avoir lieu, à moins que la différence

$$U - \lg \frac{2}{e^u + e^{-u}}$$

sur cette courbe n'ait constamment la même valeur.“

Le mémoire détaillé sur la construction des cartes géographiques, promis par *Tchébychef* à la fin de la note, n'a pas paru.

J'ai réussi à démontrer cette remarquable proposition déjà en 1894. Le court résumé de ma démonstration a été présenté à la Section mathématique du Congrès de Caen (1894) de l'Association Française pour l'avancement des sciences.

On peut voir ma note intitulée „sur une question de *Tchébychef*" dans les publications de l'Association (1895).

On peut trouver la démonstration complète dans mon mémoire étendu sur les cartes géographiques en langue russe (1896).

2. Dans les cahiers de janvier et de février de 1911 du Bulletin des sciences mathématiques ont paru deux notes de M. le professeur *Darboux* concernant le même sujet.

L'illustre géomètre dit que la proposition de *Tchébychef* n'est pas démontrée, ni même énoncée nettement.

Au lieu de considérer la différence entre le maximum et le minimum de la fonction

$$U - \lg \frac{2}{e^u + e^{-u}}$$

pour les valeurs de u et t limitées par le contour et de faire cette différence minimum M. *Darboux* considère la question du calcul ordinaire des variations et cherche le minimum d'une intégrale double étendue sur une aire, limitée par un contour quelconque, la fonction sous le signe intégrale dépendant du rapport d'agrandissement.

L'idée de considérer l'intégrale double n'est pas nouvelle, c'est la conception de *H. Weber**) (1867) et de *Eisenlohr***) (1870).

3. Je me propose ici de reconstituer ma démonstration, restée inconnue, en envisageant la question sous un point de vue le plus général. En effet la proposition de *Tchébychef* est vraie pour la surface arbitrairement choisie à la seule condition que la courbure de la surface ne change de signe pour tout le domaine de la contrée représentée.

4. Prenons dans notre surface les coordonnées réelles symétriques,

---

*) *Weber*, über ein Prinzip der Abbildung der Teile einer krummen Oberfläche auf eine Ebene. Dieses Journ., B. 67.

**) *Eisenlohr*, über die Flächenabbildung. Dieses Journ., B. 72.

qui donnent pour la différentielle de l'arc d'une courbe tracée sur la surface la forme

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2),$$

où λ est une fonction réelle des u, v, complètement déterminée par la forme de la surface.

Chaque représentation conforme de la surface sur un plan s'exprime par la formule

$$x + iy = F(u + iv)$$

où x, y sont les coordonnées rectangulaires réelles sur la carte.

5. Le rapport d'agrandissement s'exprime par la formule

$$m = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{ds},$$

ce qui donne

$$m = \frac{\sqrt{(x'_u)^2 + (y'_u)^2}}{\lambda} = \frac{\sqrt{F'(u+iv) f'(u-iv)}}{\lambda},$$

où $f(z)$ est une nouvelle fonction, qu'on obtient par le changement de $+i$ en $-i$.

Nous aurons

$$\lg m = H - \lg \lambda$$

où

$$(1.) \qquad H = \frac{1}{2} \lg F'(u+iv) + \frac{1}{2} \lg f'(u-iv)$$

est une fonction réelle harmonique.

6. Si nous prenons une telle carte pour laquelle le rapport d'agrandissement conserve une valeur constante le long du contour, nous aurons pour tous les points de ce contour

$$H = \lg \lambda + C$$

ce qui donne les valeurs de la fonction harmonique H sur le contour.

Or d'après le principe de *Dirichlet* la fonction H est bien déterminée pour l'intérieur du contour.

L'équation (1.) détermine la fonction $F(u + iv)$ quand la fonction H est déjà connue.

Nous voyons qu'on peut trouver la carte avec un constant rapport d'agrandissement sur le coutour.

7. Pour démontrer la proposition de *Tchébychef* considérons le domaine de la surface où la courbure est positive. Les considérations resteront les mêmes pour le cas de la courbure négative.

Nous pouvons appeler *l'amplitude* la différence entre le maximum et le minimum de la fonction $\lg m$, pour tous les points sur le contour et à son intérieur.

C'est cette amplitude qu'il faut faire minimum dans la question de *Tchébychef*.

La constante additive ne changeant pas l'amplitude, nous pouvons considérer la carte pour laquelle la fonction $\lg m$ est nulle sur le contour.

8. *Lemme.* Si la fonction $H - \lg \lambda$ est nulle sur le contour, elle reste négative pour tous les points de l'intérieur.

Supposons le contraire, c'est-à-dire l'existence de valeurs positives de la différence $H - \lg \lambda$ à l'intérieur du contour. Prenons la valeur maximum de ces valeurs positives. Cette valeur maximum correspondra au point (u, v) de l'intérieur.

Nous obtenons pour ce point les inégalités nécessaires

$$\frac{\partial^2 (H - \lg \lambda)}{\partial u^2} \leqq 0, \quad \frac{\partial^2 (H - \lg \lambda)}{\partial v^2} \leqq 0.$$

En prenant la somme des parties gauches, nous aurons

$$\lambda^2 K \leqq 0,$$

où K est la courbure de la surface. L'impossibilité de la dernière inégalité démontre le lemme proposé.

9. Considérons les deux différences

$$H - \lg \lambda, \quad H_1 - \lg \lambda$$

où H et H_1 sont les deux fonctions harmoniques dont la dernière H_1 est arbitraire tandis que la première H est celle du § 6 qui donne la différence nulle sur le contour.

Pour démontrer la proposition de *Tchébychef* il ne reste qu'à faire voir, que l'amplitude de la fonction $H_1 - \lg \lambda$ est plus grande que celle de la fonction $H - \lg \lambda$.

En effet, désignons par A la plus grande valeur de $H_1 - \lg \lambda$ sur le contour et posons $H_2 = H_1 - A$. Alors la différence $H_2 - \lg \lambda$ aura la même amplitude que la différence $H_1 - \lg \lambda$ et nous n'avons qu'à comparer les amplitudes des deux différences

$$H - \lg \lambda, \quad H_2 - \lg \lambda.$$

Nous devons naturellement supposer, que la différence $H_1 - \lg \lambda$ n'a pas une valeur constante sur le contour, c'est-à-dire, que la différence

$H_2 - \lg \lambda$ étant nulle pour le point A doit avoir des valeurs négatives sur le contour.

La différence

$$H_2 - H = (H_2 - \lg \lambda) - (H - \lg \lambda)$$

est une fonction harmonique qui a sur le contour les mêmes valeurs que la fonction $H_2 - \lg \lambda$.

D'après les propriétés remarquables des fonctions harmoniques nous pouvons conclure que la fonction $H_2 - H$ a des valeurs négatives pour tous les points à l'intérieur.

L'équation

$$H_2 - \lg \lambda = H - \lg \lambda + (H_2 - H)$$

nous montre que la fonction $H_2 - \lg \lambda$ étant nulle pour un ou plusieurs points du contour prend des valeurs négatives pour les autres points du contour et de son intérieur.

Toutes les valeurs que prend la fonction $H_2 - \lg \lambda$ à l'intérieur du contour sont plus petites que les valeurs correspondantes de la fonction $H - \lg \lambda$.

Nous sommes amenés à la conclusion que l'amplitude de la fonction $H_2 - \lg \lambda$ est plus grande que celle de la fonction $H - \lg \lambda$ et la proposition de *Tchébychef* est démontrée.

10. Il est aisé à démontrer que le théorème de *Tchébychef* n'est plus exacte, si la courbure de la surface change son signe dans le domaine considéré. Alors la meilleure représentation au sens de *Tchébychef* jouit de propriétés toutes différentes.

Ce sont les questions que je me propose de traiter dans un autre mémoire.

Ein Beweis für die Zerlegbarkeit der Primzahlen von der Form $6n+1$ in ein einfaches und ein dreifaches Quadrat.

Von Herrn *Lothar von Schrutka* in Wien.

1. Einleitung.

In seiner im Jahre 1906 bei Kästner in Göttingen gedruckten Dissertation „*Anwendungen einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste*“, von der auch ein Teil und zwar gerade der hier am meisten in Betracht kommende in diesem Journal, Band 132, Heft 3, S. 238 abgedruckt ist, hat mein Freund Dr. *Ernst Jacobsthal* eine interessante Bestimmung der Basen a und b in der bekannten für jede Primzahl p von der Form $4n+1$ giltigen Gleichung

$$p = a^2 + b^2$$

geliefert. Ich will im folgenden zeigen, daß sich eine ähnliche Bestimmung auch für die Basen a, b in der Gleichung

$$p = a^2 + 3b^2,$$

die für Primzahlen p von der Form $6n+1$ besteht, ausführen läßt.

2. Summen n-ter Art.

Ist p eine ungerade Primzahl und wird mit *Legendre* $\left(\frac{m}{p}\right)$ gleich dem absolut kleinsten Rest von $m^{\frac{p-1}{2}}$ nach dem Modul p gesetzt, so hat bekanntlich $\left(\frac{m}{p}\right)$ nur die Werte $1, -1$ oder 0 und die Anzahl der Wurzeln der Kongruenz

$$x^2 \equiv m \ (p)$$

beträgt $1+\left(\frac{m}{p}\right)$. Ferner soll mit *Jacobsthal* eine Summe

$$\sum_0^{p-1} \left(\frac{f(i)}{p}\right)$$

eine *Summe n-ter Art* genannt werden, wenn $f(i)$ eine ganze ganzzahlige Funktion n-ten Grades von i bedeutet.

3. Bestimmung der Summen erster Art.

Für den Wert der Summen erster Art gibt *Jacobsthal* (Diss., Kap. I, § 1) die (leicht zu bestätigende) Formel

$$(1.) \qquad \sum_0^{p-1} \left(\frac{ui+v}{p}\right) = p\left(\frac{v}{p}\right)\left[1-\left(\frac{u}{p}\right)^2\right].$$

4. Bestimmung der Summen zweiter Art.

Auch die Summen zweiter Art können in jedem Fall bestimmt werden (*Jacobsthal*, Diss., Kap. I, §2; dieses Journal, a. a. O., §1). Ist $a \not\equiv 0\ (p)$ (für $a \equiv 0$ kommt man auf die Summen erster Art zurück), so kann folgende Umformung ausgeführt werden:

$$\sum_0^{p-1} \left(\frac{ui^2+vi+w}{p}\right) = \left(\frac{u}{p}\right) \sum_0^{p-1} \left(\frac{(2ui+v)^2-D}{p}\right) = \left(\frac{u}{p}\right) \sum_0^{p-1} \left(\frac{k^2-D}{p}\right),$$

wo

$$2ui+v=k, \quad v^2-4uw=D$$

gesetzt ist. Ferner ist, wie sogleich gezeigt werden wird,

$$(2.) \qquad \psi(D) = \sum_0^{p-1} \left(\frac{k^2-D}{p}\right) = p-1-\left(\frac{D}{p}\right)^2;$$

somit ergibt sich die allgemeine Formel

$$(3.) \qquad \sum_0^{p-1} \left(\frac{ui^2+vi+w}{p}\right) = \left(\frac{u}{p}\right)\left[p-1-\left(\frac{D}{p}\right)^2\right] + p\left(\frac{w}{p}\right)\left[1-\left(\frac{u}{p}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{v}{p}\right)^2\right].$$

Von den drei Beweisen, die *Jacobsthal* für die Gleichung (2.) gibt, möge hier der erste mit einer kleinen Vereinfachung reproduziert werden.

Man hat für $l \not\equiv 0\ (p)$

$$\psi(l^2 D) = \sum_0^{p-1} \left(\frac{k^2-l^2D}{p}\right) = \sum_0^{p-1} \left(\frac{(k'l)^2-l^2D}{p}\right)$$

$$= \sum_0^{p-1} \left(\frac{l^2}{p}\right)\left(\frac{k'^2-D}{p}\right) = \left(\frac{l^2}{p}\right)\psi(D) = \psi(D),$$

somit besitzt $\psi(D)$ nur drei verschiedene Werte

$$\psi(0) = p-1, \ \psi(1) \text{ und } \psi(N),$$

wo N irgend einen quadratischen Nichtrest von p bedeutet.

Also ist

$$\sum_0^{p-1 D} \psi(D) = p - 1 + \frac{p-1}{2}[\psi(1) + \psi(N)];$$

andererseits ist

$$\sum_0^{p-1 D} \psi(D) = \sum_0^{p-1 D} \sum_0^{p-1 k} \left(\frac{k^2 - D}{p}\right) = \sum_0^{p-1 k} \sum_0^{p-1 D} \left(\frac{k^2 - D}{p}\right) = 0,$$

somit

$$p - 1 + \frac{p-1}{2}[\psi(1) + \psi(N)] = 0, \quad \psi(1) + \psi(N) = -2.$$

Man hat nun noch

$$\psi(1) = \sum_0^{p-1 k} \left(\frac{k^2 - 1}{p}\right) = \sum_0^{p-2 k} \left(\frac{\frac{k+1}{k-1}}{p}\right) = \sum_0^{p-2 l} \left(\frac{l}{p}\right) = -\left(\frac{1}{p}\right) = -1;$$

denn setzt man

$$\frac{k+1}{k-1} \equiv l,$$

so wird

$$k \equiv \frac{l+1}{l-1}$$

und die Werte $0, 1, \ldots p-2$ von k entsprechen (in anderer Ordnung) genau denselben Werten von l.

Also ist schließlich auch

$$\psi(N) = -1,$$

woraus die Formel (2.) folgt.

5. Zusammenstellung einiger Sätze über kubische Reste.

Je nachdem die Primzahl $p \equiv 5$ oder $\equiv 1$ (6) ist, ist jede zu p teilerfremde Zahl kubischer Rest oder es zerfallen die $p-1$ zu p teilerfremden Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots p-1$$

in drei gleichgroße Klassen, von denen eine (I) die kubischen Reste R_3 enthält, während die beiden andern (II, III) die kubischen Nichtreste N_3 enthalten. Die kubischen Reste von p seien

(I) $\quad 1, R_3, R_3', \ldots;$

dann heißen die Zahlen der beiden anderen Klassen

(II) $\quad N_{II}, N_{II}R_3, N_{II}R_3', \ldots;$

(III) $\quad N_{II}^2, N_{II}^2 R_3, N_{II}^2 R_3', \ldots;$

hier bedeutet N_{II} eine ganz beliebige Zahl aus der Klasse (II). Für jeden

kubischen Rest R_3 hat die Kongruenz

$$x^3 \equiv R_3 \ (p)$$

drei Lösungen; ist x eine davon, so heißen die beiden anderen jx und j^2x, wo j eine primitive Lösung der Kongruenz

$$x^3 \equiv 1 \ (p)$$

bedeutet. Die $\frac{p-1}{3}$-ten Potenzen haben in jeder der drei Klassen I, II, III nach dem Modul p einen bestimmten Wert. In der Klasse I ist dieser 1, in II j oder j^2, in III j^2 oder j. Die Bezeichnungen seien so gewählt, daß $N_{\text{II}}^{\frac{p-1}{3}} \equiv j$ ist.

Die öfters verwendete Relation

$$1 + j + j^2 \equiv 0 \ (p)$$

möge noch angemerkt werden. (Man sehe für diese Nummer etwa *Dirichlet-Dedekind*, Zahlentheorie, 4. Aufl., Braunschweig 1894, § 31.)

6. Die Summe vierter Art $\varphi(u)$.

Es werde nun die Summe vierter Art

$$\sum_0^{p-1} i \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i^3+u}{p}\right) = \varphi(u)$$

gesetzt. Man erkennt sofort, daß

$$\varphi(0) = p-1$$

ist. Ist $u \not\equiv 0 \ (p)$, so sind unter den p Summanden von $\varphi(u)$ diejenigen gleich 0, in denen $i = 0$ oder gleich einer Lösung der Kongruenz $x^3 \equiv -u$ ist. Für $p \equiv 5 \ (6)$ sind dies immer zwei Summanden, demnach

$$\varphi(u) \equiv 1 \ (2);$$

für $p \equiv 1 \ (6)$ hingegen sind es vier oder einer, je nachdem u (oder $-u$) kubischer Rest oder Nichtrest ist, also ist dann

$$(4.) \qquad \varphi(R_3) \equiv 1 \ (2), \quad \varphi(N_3) \equiv 0 \ (2).$$

7. Anzahl der verschiedenen Werte von $\varphi(u)$.

Man hat ferner

$$\varphi(ul^3) = \sum_0^{p-1} i \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i^3+ul^3}{p}\right) = \sum_0^{p-1} i' \left(\frac{i'l}{p}\right)\left(\frac{(i'l)^3+ul^3}{p}\right) = \left(\frac{l^4}{p}\right)\varphi(u) = \varphi(u),$$

sobald $l \not\equiv 0 \ (p)$ ist. Hieraus folgt, daß $\varphi(u)$ (abgesehen von $\varphi(0) = p-1$) für eine Primzahl $p \equiv 5 \ (6)$ nur einen einzigen Wert

$$\varphi(1) = \sum_0^{p-1} i \left(\frac{i^4+i}{p}\right).$$

für eine Primzahl $p \equiv 1\ (6)$ hingegen, den drei Klassen in Nr. 5 entsprechend, drei Werte

$$\varphi(1) = \varphi_{\mathrm{I}},\ \varphi(N_{\mathrm{II}}) = \varphi_{\mathrm{II}},\ \varphi(N_{\mathrm{II}}^2) = \varphi_{\mathrm{III}}$$

besitzt. Diese drei Werte sind sämtlich durch 3 teilbar. In der Tat ist

$$\varphi(u) = \Sigma_{R_3}\left[\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{j}{p}\right) + \left(\frac{j^2}{p}\right)\right]\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{R_3+u}{p}\right),$$

wenn x jedesmal eine Wurzel von $x^3 \equiv R_3$ bedeutet; nun ist aber sowohl $j \equiv j^4$, als auch j^2 quadratischer Rest, somit

$$\varphi(u) = 3\,\Sigma^{R_3}\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{R_3+u}{p}\right).$$

Kombiniert man dies mit den Kongruenzen (4.), so folgt

$$\varphi_{\mathrm{I}} \equiv 3\ (6),\ \varphi_{\mathrm{II}} \equiv 0\ (6),\ \varphi_{\mathrm{III}} \equiv 0\ (6). \tag{5.}$$

8. Summe der verschiedenen Werte von $\varphi(u)$; Erledigung des Falles $\varphi \equiv 5\ (6)$.

Die Summe $\sum_0^{p-1 u} \varphi(u)$ läßt sich leicht berechnen. Man hat nämlich nach Formel (2.)

$$\sum_0^{p-1 u} \varphi(u) = \sum_0^{p-1 i} \sum_0^{p-1 u}\left(\frac{i^4+ui}{p}\right) = \sum_0^{p-1 i} p\left(\frac{i^4}{p}\right)\left[1-\left(\frac{i}{p}\right)^2\right] = 0.$$

Hieraus folgt weiter wegen $\varphi(0) = p-1$

$$\sum_1^{p-1 u} \varphi(u) = -(p-1),$$

daher für $p \equiv 5\ (6)$

$$\varphi(u) = \varphi(1) = -1,$$

dagegen für $p \equiv 1\ (6)$

$$\frac{p-1}{3}(\varphi_{\mathrm{I}} + \varphi_{\mathrm{II}} + \varphi_{\mathrm{III}}) = -(p-1),$$

somit

$$\varphi_{\mathrm{I}} + \varphi_{\mathrm{II}} + \varphi_{\mathrm{III}} = -3$$

oder

$$\frac{\varphi_{\mathrm{I}}}{3} + \frac{\varphi_{\mathrm{II}}}{3} + \frac{\varphi_{\mathrm{III}}}{3} = -1. \tag{6.}$$

Der Fall $p \equiv 5\ (6)$ ist somit vollständig erledigt, und es soll fernerhin immer $p \equiv 1\ (6)$ vorausgesetzt werden.

9. Summe der Quadrate der verschiedenen Werte von $\varphi(u)$.

Für $p \equiv 1\,(6)$ ist nach den Resultaten der Nr. 7

$$\sum_0^{p-1 u} \varphi^2(u) = (p-1)^2 + \frac{p-1}{3}[\varphi_{\mathrm{I}}^2 + \varphi_{\mathrm{II}}^2 + \varphi_{\mathrm{III}}^2].$$

Andrerseits hat man

$$\sum_0^{p-1}{}^{u} \varphi^2(u) = \sum_0^{p-1}{}^{u} \sum_0^{p-1}{}^{i} \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i^3+u}{p}\right) \cdot \sum_0^{p-1}{}^{i'} \left(\frac{i'}{p}\right)\left(\frac{i'^3+u}{p}\right)$$

$$= \sum_0^{p-1}{}^{i,i'} \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i'}{p}\right) \sum_0^{p-1}{}^{u} \left(\frac{u^2+(i^3+i'^3)u+i^3 i'^3}{p}\right),$$

somit nach Formel (3.)

$$\sum_0^{p-1}{}^{u} \varphi^2(u) = \sum_0^{p-1}{}^{i,i'} \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i'}{p}\right)\left[p-1-p\left(\frac{(i^3-i'^3)^2}{p}\right)\right]$$

$$= \sum_0^{p-1}{}^{i} \left(\frac{i}{p}\right) \cdot \sum_0^{p-1}{}^{i'} \left(\frac{i'}{p}\right)(p-1) - p \sum_0^{p-1}{}^{i} \left(\frac{i}{p}\right) \Sigma^{i'} \left(\frac{i'}{p}\right)\left(\frac{(i^3-i'^3)^2}{p}\right)$$

oder wegen $\sum_0^{p-1}{}^{i} \left(\frac{i}{p}\right) = 0$

$$\sum_0^{p-1}{}^{u} \varphi^2(u) = -p \sum_0^{p-1}{}^{i} \left(\frac{i}{p}\right) \cdot \left[-\left(\frac{i}{p}\right) - \left(\frac{ij}{p}\right) - \left(\frac{ij^2}{p}\right)\right] = p(p-1) \cdot 3.$$

Die Vergleichung der beiden Resultate lehrt, daß

$$p - 1 + \frac{1}{3}[\varphi_{\mathrm{I}}^2 + \varphi_{\mathrm{II}}^2 + \varphi_{\mathrm{III}}^2] = 3p$$

oder

$$\text{(7.)} \qquad \left[\frac{\varphi_{\mathrm{I}}}{3}\right]^2 + \left[\frac{\varphi_{\mathrm{II}}}{3}\right]^2 + \left[\frac{\varphi_{\mathrm{III}}}{3}\right]^2 = p - \frac{p-1}{3}$$

ist. Diese Formel (samt Deduktion) findet sich übrigens auch bei *Jacobsthal* (Diss., Kap. II, § 3).

10. Summe der Produkte je zweier Werte von $\varphi(u)$.

Man betrachte jetzt noch die Summe

$$\sum_0^{p-1}{}^{u} \varphi(N_{\mathrm{II}} u)\, \varphi(N_{\mathrm{II}}^2 u);$$

nach Nr. 7 ist sie gleich

$$(p-1)^2 + \frac{p-1}{3}[\varphi_{\mathrm{II}}\varphi_{\mathrm{III}} + \varphi_{\mathrm{III}}\varphi_{\mathrm{I}} + \varphi_{\mathrm{I}}\varphi_{\mathrm{II}}].$$

Andererseits hat man (ähnlich wie in Nr. 9)

$$\sum_0^{p-1}{}^{u} \varphi(N_{\mathrm{II}} u)\, \varphi(N_{\mathrm{II}}^2 u) = \sum_0^{p-1}{}^{u} \sum_0^{p-1}{}^{i} \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i^3+N_{\mathrm{II}}u}{p}\right) \cdot \sum_0^{p-1}{}^{i'} \left(\frac{i'}{p}\right)\left(\frac{i'^3+N_{\mathrm{II}}^2 u}{p}\right)$$

$$= \sum_0^{p-1}{}^{i,i'} \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i'}{p}\right) \sum_0^{p-1}{}^{u} \left(\frac{u^2+(N_{\mathrm{II}}^2 i^3 + N_{\mathrm{II}} i'^3)u + i^3 i'^3}{p}\right),$$

somit nach Formel (3.)

$$= \sum_0^{p-1}{}^{i,i'} \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i'}{p}\right)\left[p-1-p\left(\frac{N_{\mathrm{II}}^2 i^3 - N_{\mathrm{II}} i'^3}{p}\right)^2\right]$$

$$= \sum_0^{p-1}{}^{i} \left(\frac{i}{p}\right) \sum_0^{p-1}{}^{i'} \left(\frac{i'}{p}\right)(p-1) - p \sum_0^{p-1}{}^{i} \left(\frac{i}{p}\right) \sum_0^{p-1}{}^{i'} \left(\frac{i'}{p}\right)\left(\frac{N_{\mathrm{II}}^2 i^3 - N_{\mathrm{II}} i'^3}{p}\right)^2$$

oder wegen $\sum_0^{p-1}{}^{i} \left(\frac{i}{p}\right) = 0$

$$\sum_{0}^{p-1 u} \varphi(N_{II} u)\,\varphi(N_{II}^2 u) = 0,$$

denn der Ausdruck

$$N_{II}^2 i^3 - N_{II} i'^3 = N_{II}(N_{II} i^3 - i'^3)$$

wird, weil N_{II} kubischer Nichtrest ist, nur dann durch p teilbar, wenn $i = i' = 0$ ist.

Somit ist

$$(p-1)^2 + \frac{p-1}{3}[\varphi_{II}\varphi_{III} + \varphi_{III}\varphi_{I} + \varphi_{I}\varphi_{II}] = 0,$$

$$\frac{\varphi_{II}}{3}\cdot\frac{\varphi_{III}}{3} + \frac{\varphi_{III}}{3}\cdot\frac{\varphi_{I}}{3} + \frac{\varphi_{I}}{3}\cdot\frac{\varphi_{II}}{3} = -\frac{p-1}{3}. \tag{8.}$$

Diese Relation könnte man auch aus (6.) und (7.) ableiten, indem man (6.) quadriert und (7.) abzieht.

11. Anwendung auf die Zerlegung von p in ein einfaches und ein dreifaches Quadrat.

Die Kombination der Formeln (7.) und (8.) ergibt nun

$$\left[\frac{\varphi_{I}}{3}\right]^2 + \left[\frac{\varphi_{II}}{3}\right]^2 + \left[\frac{\varphi_{III}}{3}\right]^2 - \frac{\varphi_{II}}{3}\cdot\frac{\varphi_{III}}{3} - \frac{\varphi_{III}}{3}\cdot\frac{\varphi_{I}}{3} - \frac{\varphi_{I}}{3}\cdot\frac{\varphi_{II}}{3} = p$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$\left[\frac{2\varphi_{I} - \varphi_{II} - \varphi_{III}}{6}\right]^2 + 3\left[\frac{\varphi_{II} - \varphi_{III}}{6}\right]^2 = p.$$

Die Ausdrücke

$$a = \frac{2\varphi_{I} - \varphi_{II} - \varphi_{III}}{6},$$

$$b = \frac{\varphi_{II} - \varphi_{III}}{6}$$

sind nach (5.) ganze Zahlen, also folgt: *Jede Primzahl* $p \equiv 1\ (6)$ *läßt sich als Summe eines einfachen und eines dreifachen Quadrats darstellen:*

$$p = a^2 + 3b^2.$$

Für die Basis a kann nach (6.) auch der Ausdruck

$$a = \frac{\varphi_{I} + 1}{2} \tag{9.}$$

gewählt werden. Hieraus folgt wegen (5.)

$$a \equiv 2\ (3),$$

wodurch das Vorzeichen von a festgelegt ist. Für b ist eine solche Festlegung unmöglich, da ja die Wahl eines Nichtrestes N_{III} aus der Klasse III an Stelle von N_{II} das Vorzeichen von b ändert.

12. Bestimmung der Basen a und b als absolut kleinste Reste.

Die Basen a und b können als absolut kleinste Reste folgendermaßen bestimmt werden. Man hat

$$\varphi(u) = \sum_0^{p-1} i \left(\frac{i^4+ui}{p}\right) \equiv \sum_0^{p-1} i \,(i^4+ui)^{\frac{p-1}{2}} = \sum_0^{p-1} i \sum_0^{\frac{p-1}{2}} k \binom{\frac{p-1}{2}}{k} i^{4k} \cdot i^{\frac{p-1}{2}-k} u^{\frac{p-1}{2}-k}$$

$$= \sum_0^{\frac{p-1}{2}} k \, u^{\frac{p-1}{2}-k} \cdot \sum_0^{p-1} i \, i^{\frac{p-1}{2}+3k}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\sum_0^{\frac{p-1}{2}} i \, i^s \equiv -1 \text{ oder } 0 \;(p),$$

je nachdem s durch $p-1$ teilbar ist oder nicht; somit ist

$$\varphi(u) \equiv -\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{6}} u^{\frac{p-1}{3}} - \binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{2}} u^0 = -\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{6}} u^{\frac{p-1}{3}} - 1,$$

also

$$\varphi_{\mathrm{I}} \equiv -\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{6}} - 1,$$

$$\varphi_{\mathrm{II}} \equiv -\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{6}} j - 1,$$

$$\varphi_{\mathrm{III}} \equiv -\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{6}} j^2 - 1.$$

Hieraus folgt

$$a \equiv -\frac{1}{2}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{6}} \qquad (p),$$

$$b \equiv \binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{6}} \frac{j^2-j}{6} \qquad (p).$$

13. Definition gewisser „Sequenzen" von quadratischen Resten und Nichtresten.

Analog wie es *Jacobsthal* in Kapitel III seiner Dissertation (im Abdruck in diesem Journal, Bd. 132 nicht enthalten) tut, kann man auch hier die Summe $\varphi(u)$ benutzen, um gewisse Resultate betreffend die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste zu erhalten. Hierbei ergeben sich auch noch genauere Bestimmungen für die Basis a.

Man denke sich unter jede der Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \ldots p-1 \tag{10.}$$

R oder N geschrieben, je nachdem sie quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist (der Platz unter 0 ist leer zu lassen); dann bedeute (in Anlehnung an *Jacobsthals* Bezeichnung, aber mit einer kleinen Abweichung) z. B. $RRNR$, *wie oft* sich an irgend einer Stelle i, der Stelle $i+1$, dann $i+j$ und $i+j^2$ die Buchstaben R, R, N, R befinden, wobei die Reihe (10.) als zyklisch geschlossen anzusehen ist. Im ganzen sind 16 verschiedene solche „*Sequenzen*" möglich: R,R,R,R; R,R,R,N; $\ldots N,N,N,N$. Die Anzahl aller (gleichen oder verschiedenen) in (10.) enthaltenen Sequenzen hingegen beträgt offenbar $p-4$, da diejenigen, bei denen eine der vier Stellen 0 ist, wegfallen.

14. Aufstellung einer Funktion, welche die 16 Sequenzenanzahlen liefert.

Um die 16 Sequenzenanzahlen zu bestimmen, betrachte man die folgende Summe

$$\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=\Sigma^f\left[1+\varepsilon_1\left(\frac{f}{p}\right)\right]\left[1+\varepsilon_2\left(\frac{f+1}{p}\right)\right]\left[1+\varepsilon_3\left(\frac{f+j}{p}\right)\right]\left[1+\varepsilon_4\left(\frac{f+j^2}{p}\right)\right],$$

wo f alle Zahlen (10.), ausgenommen 0, $p-1$, $p-j$, $p-j^2$ durchläuft. Man erkennt leicht, daß

$$\begin{aligned}
&\psi(+1,+1,+1,+1)=16\,RRRR,\\
&\psi(+1,+1,+1,-1)=16\,RRRN,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\psi(-1,-1,-1,-1)=16\,NNNN
\end{aligned}$$

ist.

Führt man in $\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ die Multiplikation aus und ordnet nach $\varepsilon_1.\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$, so erhält man zunächst $p-4$, dann vier Glieder, die $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ als Faktoren enthalten, dann sechs Glieder mit $\varepsilon_1\varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_3, \varepsilon_1\varepsilon_4,$

$\varepsilon_2\varepsilon_3, \varepsilon_2\varepsilon_4, \varepsilon_3\varepsilon_4$, vier Glieder mit $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4, \varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_4, \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$, endlich ein Glied mit $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$. Zufolge der Summationsbedingung für f sind die Koeffizienten in diesen Gliedergruppen der Reihe nach: Summen erster Art, in denen drei Glieder fehlen; Summen zweiter Art, in denen zwei Glieder fehlen; Summen dritter Art, in denen ein Glied fehlt; endlich eine Summe vierter Art.

Die Bestimmung dieser Koeffizienten wird wesentlich durch die Bemerkung erleichtert, daß $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ in $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ symmetrisch ist. In der Tat wird $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ durch die Substitution $f = jf'$ in

$$\Sigma_{f'}\left[1+\varepsilon_1\left(\frac{jf'}{p}\right)\right]\left[1+\varepsilon_2\left(\frac{jf'+1}{p}\right)\right]\left[1+\varepsilon_3\left(\frac{jf'+j}{p}\right)\right]\left[1+\varepsilon_4\left(\frac{jf'+j^2}{p}\right)\right]$$

$$=\Sigma_{f'}\left[1+\varepsilon_1\left(\frac{f'}{p}\right)\right]\left[1+\varepsilon_2\left(\frac{f'+j^2}{p}\right)\right]\left[1+\varepsilon_3\left(\frac{f'+1}{p}\right)\right]\left[1+\varepsilon_4\left(\frac{f'+j}{p}\right)\right]$$

$$=\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_2)$$

übergeführt; also gestattet $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ die zyklischen Permutationen von $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, ist daher zweiwertig oder symmetrisch in diesen Argumenten. Der erste der beiden Fälle ist auszuschließen; denn die Funktion

$$\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) - \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_3)$$

ist alternierend, demnach durch das Differenzprodukt von $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ teilbar, da sie aber in jeder der drei Größen $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ linear ist, so muß sie identisch verschwinden; somit gilt

$$\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_3),$$

ψ ist also symmetrisch, wie behauptet wurde. Unter den 16 Koeffizienten von ψ kommen daher höchstens 8 verschiedene vor.

Es möge jetzt noch

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=\left(\frac{-j}{p}\right)=\left(\frac{-j^2}{p}\right)=\eta, \quad \left(\frac{1-j}{p}\right)=\left(\frac{j-j^2}{p}\right)=\left(\frac{j^2-1}{p}\right)=\omega,$$

also

$$\left(\frac{1-j^2}{p}\right)=\left(\frac{j-1}{p}\right)=\left(\frac{j^2-j}{p}\right)=\eta\omega$$

gesetzt werden. Dann ist der Koeffizient bei ε_1

$$\Sigma_f\left(\frac{f}{p}\right)=\sum_0^{p-1}{}_i\left(\frac{i}{p}\right)-\left(\frac{-1}{p}\right)-\left(\frac{-j}{p}\right)-\left(\frac{-j^2}{p}\right)=-3\eta,$$

der bei ε_2

$$\Sigma_f\left(\frac{f+1}{p}\right)=\sum_0^{p-1}{}_i\left(\frac{i}{p}\right)-\left(\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1-j}{p}\right)-\left(\frac{1-j^2}{p}\right)=-1-\omega-\eta\omega,$$

die Koeffizienten bei ε_3 und ε_4 haben wegen der Symmetrie ebenfalls den

Wert $-1-\omega-\eta\omega$. Der Koeffizient bei $\varepsilon_1\varepsilon_2$ ist

$$\Sigma' \left(\frac{f}{p}\right)\left(\frac{f+1}{p}\right) = \sum_0^{p-1 i} \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i+1}{p}\right) - \left(\frac{-j}{p}\right)\left(\frac{-j+1}{p}\right) - \left(\frac{-j^2}{p}\right)\left(\frac{-j^2+1}{p}\right)$$
$$= \sum_0^{p-1 i} \left(\frac{i^2+i}{p}\right) - \left(\frac{j^2-j}{p}\right) - \left(\frac{j-j^2}{p}\right) = -1-\omega-\eta\omega$$

(nach Formel (3.)), ebenso groß sind die Koeffizienten bei $\varepsilon_1\varepsilon_3$, $\varepsilon_1\varepsilon_4$. Der Koeffizient bei $\varepsilon_2\varepsilon_3$ ist

$$\Sigma' \left(\frac{f+1}{p}\right)\left(\frac{f+j}{p}\right) = \sum_0^{p-1 i} \left(\frac{i+1}{p}\right)\left(\frac{i+j}{p}\right) - \left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{j}{p}\right) - \left(\frac{-j^2+1}{p}\right)\left(\frac{-j^2+j}{p}\right)$$
$$= \sum_0^{p-1 i} \left(\frac{i^2+(1+j)i+j}{p}\right) - 1 - \eta = -2-\eta;$$

denselben Wert haben die Koeffizienten bei $\varepsilon_2\varepsilon_4$, $\varepsilon_3\varepsilon_4$. Die Koeffizienten bei $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4$, $\varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_4$ stimmen wieder überein; es werde etwa der letzte berechnet:

$$\Sigma' \left(\frac{f}{p}\right)\left(\frac{f+j}{p}\right)\left(\frac{f+j^2}{p}\right) = \sum_0^{p-1 i} \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i+j}{p}\right)\left(\frac{i+j^2}{p}\right) - \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{-1+j}{p}\right)\left(\frac{-1+j^2}{p}\right)$$
$$= \sum_0^{p-1 i} \left(\frac{i^3-i^2+i}{p}\right) - \eta\cdot\eta\omega\cdot\omega = K-1,$$

wo K als Abkürzung für die Summe dritter Art stehen möge. Ähnlich ist der Koeffizient von $\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$

$$\Sigma' \left(\frac{f+1}{p}\right)\left(\frac{f+j}{p}\right)\left(\frac{f+j^2}{p}\right) = \sum_0^{p-1 i} \left(\frac{i+1}{p}\right)\left(\frac{i+j}{p}\right)\left(\frac{i+j^2}{p}\right) - \left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{j}{p}\right)\left(\frac{j^2}{p}\right)$$
$$= \sum_0^{p-1 i} \left(\frac{i^3+1}{p}\right) - 1 = L-1.$$

(Die hier L genannte Summe dritter Art kommt bei *Jacobsthal*, Diss., Kap. II, § 4 als $\chi_3(1)$ vor.) Endlich ist der Koeffizient bei $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$

$$\Sigma' \left(\frac{f}{p}\right)\left(\frac{f+1}{p}\right)\left(\frac{f+j}{p}\right)\left(\frac{f+j^2}{p}\right) = \sum_0^{p-1 i} \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i+1}{p}\right)\left(\frac{i+j}{p}\right)\left(\frac{i+j^2}{p}\right)$$
$$= \sum_0^{p-1 i} \left(\frac{i^4+i}{p}\right) = \varphi(1) = \varphi_I.$$

Somit ist das Resultat folgendes:

$$\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = p - 4 - 3\eta\cdot\varepsilon_1$$
$$-(1+\omega+\eta\omega)\cdot[\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_4]$$
$$-(2+\eta)\cdot[\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4+\varepsilon_3\varepsilon_4]+(K-1)\cdot[\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_4]$$
$$+(L-1)\cdot\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4+\varphi_I\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4.$$

15. Tabelle der 16 Sequenzenanzahlen.

Hieraus können nun die 16 Anzahlfunktionen bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
(i)\quad & 16\ RRRR = p - 20 - 6\eta - 6(1+\eta)\omega + 3K + L + \varphi_1,\\
& \left.\begin{matrix}16\ RRRN\\ 16\ RRNR\\ 16\ RNRR\end{matrix}\right\} = p - 2 - 2\eta - 2(1+\eta)\omega - K - L - \varphi_1,\\
& \left.\begin{matrix}16\ RRNN\\ 16\ RNRN\\ 16\ RNNR\end{matrix}\right\} = p - 2\eta + 2(1+\eta)\omega - K + L + \varphi_1,\\
(iv)\quad & 16\ RNNN = p - 6 - 6\eta + 6(1+\eta)\omega + 3K - L - \varphi_1,\\
(v)\quad & 16\ NRRR = p - 8 - 3K + L - \varphi_1,\\
& \left.\begin{matrix}16\ NRRN\\ 16\ NRNR\\ 16\ NNRR\end{matrix}\right\} = p - 2 + 4\eta + K - L + \varphi_1,\\
& \left.\begin{matrix}16\ NRNN\\ 16\ NNRN\\ 16\ NNNR\end{matrix}\right\} = p - 4 + 4\eta + K + L - \varphi_1,\\
(viii)\quad & 16\ NNNN = p - 6 - 3K - L + \varphi_1.
\end{aligned}
$$

16. Folgerungen aus den Formeln in Nr. 15.

Aus diesen 8 Formeln können nun interessante Schlüsse gezogen werden. Es werde jedoch noch vorausgeschickt, daß $L \equiv 1\ (3)$ ist. In der Tat ist ja (vgl. Nr. 7)

$$L = \left(\frac{1}{p}\right) + \Sigma_{R_3}\left[\left(\frac{x^3+1}{p}\right) + \left(\frac{(jx)^3+1}{p}\right) + \left(\frac{(j^2x)^3+1}{p}\right)\right] = 1 + 3\,\Sigma_{R_3}\left(\frac{R_3+1}{p}\right),$$

wo x jedesmal eine Lösung von $x^3 \equiv R_3\ (p)$ bedeutet.

Nun folgt, weil ja $\varphi_1 \equiv 0\ (3)$ ist (Nr. 7), daß

$$RRRR \equiv RNNN \equiv NRRR \equiv NNNN \equiv 0\ (3)$$

ist.

Ferner ergibt die Addition von (v) und $(viii)$

$$16(NRRR + NNNN) = 2p - 14 - 6K,$$

somit

$$2p - 14 - 6K \equiv 0 \quad (48),$$

$$K \equiv \frac{p-7}{3} \quad (8);$$

hieraus insbesondere

$$K \equiv \frac{p-7}{3} \equiv -p - 1 \quad (4),$$

oder, weil $-p-1$ gerade ist,

$$K \equiv p+1 \quad (4).$$

K ist also gerade, was sich auch direkt beweisen ließe.

Die Addition von (v), zweimal (vi) und einmal (vii) liefert

$$16(NRRR+NRRN+NRNR+NRNN) = 4p+12\eta-16,$$

somit

$$4p+12\eta \equiv 0 \quad (16),$$

$$p \equiv \eta \quad (4),$$

also

$$\eta = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

den ersten Ergänzungssatz des quadratischen Reziprozitätsgesetzes.

Die Addition von (iv) und $(viii)$ ergibt

$$16(RNNN+NNNN) = 2p-12-6\eta+6(1+\eta)\omega-2L,$$

somit

$$2p-6-6(1+\eta)(1-\omega)-2L \equiv 0 \quad (48),$$

$$L \equiv p-3-3(1+\eta)(1-\omega) \quad (24). \qquad (11.)$$

Nun ist

$$p \equiv \eta \quad (4),$$

daher, weil $1-\omega$ jedenfalls gerade ist,

$$3p(1-\omega) \equiv 3\eta(1-\omega) \quad (24),$$

also

$$L \equiv p-3-3(1+p)(1-\omega) = (-2+3\omega)p+(-6+3\omega) \quad (24). \qquad (12.)$$

Weiter folgt aus (11.), da $(1+\eta)(1-\omega)$ jedenfalls durch 4 teilbar ist,

$$L \equiv p-3 \quad (12),$$

ferner wegen $p \equiv 1$ (6)

$$L \equiv 4 \quad (6).$$

L ist also ebenfalls gerade (was wieder auch direkt erhalten werden kann). Wegen $p \equiv \eta$ (4) ist auch noch

$$L \equiv \eta-3 \equiv \eta+1 \quad (4).$$

Und nun ergibt etwa $(viii)$

$$0 \equiv p-6-3\frac{p-7}{3}-L+\varphi_I \quad (24),$$

$$\varphi_I \equiv L-1 \quad (24);$$

daraus folgt nach (9.)

$$a \equiv \frac{L}{2} \quad (12).$$

Hierfür kann wegen (12.) auch

$$a \equiv \frac{1}{2}[(-2+3\omega)p+(-6+3\omega)] = (-2+3\omega)\frac{p+1}{2} - 2 \quad (12)$$

gesetzt werden. Ist nun $p \equiv 1$ (12), $\frac{p+1}{2}$ daher $\equiv 1$ (6), so folgt hieraus

$$-2+3\omega \equiv \frac{a+2}{\frac{p+1}{2}} \quad (12).$$

Hiernach ist in diesem Falle das Symbol $\omega = \left(\frac{j-j^2}{p}\right)$ durch a bestimmt. Die Formel kann noch vereinfacht werden, indem der Modul 4 eingeführt wird:

$$-2-\omega \equiv \frac{a+2}{\frac{p+1}{2}} \quad (4),$$

$$\omega \equiv -(a+2)\frac{p+1}{2} - 2 \quad (4)$$

oder

$$\omega \equiv -a\frac{p+1}{2} \quad (4).$$

Anders im Falle $p \equiv 7$ (12). Hier ist $\frac{p+1}{2} \equiv 4$ (6), also wegen

$$-2+3\omega \equiv 1 \ (6)$$

$$a \equiv 2 \ (6),$$

ein Resultat, das sich aber auch direkt ohne weiteres ergibt. Es zeigt sich hier also ein bemerkenswerter Unterschied zwischen den Primzahlen $12n+1$ und $12n+7$.

Zur Theorie der Funktionale.

Von Herrn *Ernst Jacobsthal* in Berlin.

Einleitung.

Die Theorie der algebraischen Zahlen begründet *H. Weber* im zweiten Bande seiner Algebra unter Benutzung des *Kronecker*schen Hilfsmittels der unbestimmten Größen. Erweitert man den vorgelegten algebraischen Zahlkörper durch Adjunktion der sogenannten *Funktionale* zu einem *Funktionalkörper*, so liegt bei dem Beweise, daß in dem so erweiterten Bereich jede ganze Größe in endlicher und eindeutiger Weise als Produkt von Primgrößen darstellbar ist, der Kernpunkt der Untersuchung in dem Nachweis, daß n ganze Größen in dem so erweiterten Bereich stets einen größten gemeinsamen Teiler besitzen, der sich als Linearform jener n Größen darstellt. Dieses Ergebnis nun steht, wie im folgenden gezeigt werden soll, in allerengstem Zusammenhange mit einem bekannten Fundamentalsatz, der zuerst von *Hurwitz* zur Begründung des Hauptsatzes der Idealtheorie herangezogen worden ist. Gewonnen wird dieser Zusammenhang, indem die Existenz des größten gemeinsamen Teilers gefolgert wird aus einer leicht beweisbaren Eigenschaft, die jedem ganzen oder gebrochenen Funktional zukommt und jenen Fundamentalsatz nach sich zieht, aber auch ebenso unmittelbar aus ihm abgelesen werden kann.

§ 1.

Wir stellen zunächst die nötigen Definitionen und Sätze zusammen, soweit wir sie im folgenden brauchen*).

*) Vgl. *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra, 2. Auflage, Bd. II, § 151 ff. Siehe auch ebenda S. 558f. die nötigen Literaturnachweise. Wir zitieren im folgenden *Weber*s Algebra kurz mit A.

Es sei uns ein algebraischer Zahlkörper n-ten Grades gegeben. Wir betrachten nun die ganzen rationalen Funktionen von irgend welchen unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, u, \ldots$, setzen aber voraus, daß die Koeffizienten dieser Funktionen Zahlen des zugrunde gelegten algebraischen Zahlkörpers sind. Die einzelnen Glieder einer solchen Funktion $\varphi = \Sigma \alpha x^r y^s z^t \cdots$ sollen dabei so zusammengefaßt sein, daß ein und dasselbe Potenzprodukt $x^r y^s z^t \cdots$ nur ein einziges Mal vorkommt. Es wird nur dann eine solche Funktion gleich Null gesetzt, wenn alle Koeffizienten gleich Null sind. Zwei Funktionen heißen einander gleich, wenn sie dieselben Produkte $x^r y^s z^t \cdots$, mit denselben Koeffizienten versehen, enthalten. — Jede solche Funktion φ mit *rationalen* Koeffizienten läßt sich eindeutig in die Form $\varphi = q\mathsf{E}$ setzen, wo q eine rationale positive Zahl ist und E eine *primitive* Funktion bedeutet, d. h. eine ganze Funktion, deren rationale *ganzzahlige* Koeffizienten keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Bekanntlich ist das Produkt zweier primitiven Funktionen E, E' wieder eine primitive Funktion. Ist $q\mathsf{E} = q'\mathsf{E}'$, so ist $q = q'$ und $\mathsf{E} = \mathsf{E}'$.

Bilden wir nun aus zwei ganzen Funktionen φ, ψ, deren Koeffizienten Zahlen unseres algebraischen Zahlkörpers sind, den Quotienten $\omega = \frac{\varphi}{\psi}$, so nennen wir ω ein *Funktional* unseres Körpers. Ein Funktiona ist also eine ganze oder gebrochene Funktion von irgend welchen Variablen, deren Koeffizienten unserem Körper angehören.

Zwei Funktionale $\frac{\varphi}{\psi}$ und $\frac{\varphi'}{\psi'}$ sind dann und nur dann gleich, wenn $\varphi\psi' = \varphi'\psi$ ist.

Die Zahlen des algebraischen Zahlkörpers sind unter den Funktionalen mit inbegriffen.

Die Gesamtheit der Funktionale bildet nun einen Körper, den *Funktionalkörper*, der unseren algebraischen Zahlkörper als Teiler enthält. Denn die Anwendung der vier Grundrechnungsarten auf zwei rationale Funktionen liefert wieder eine rationale Funktion, deren Koeffizienten dem gegebenen Zahlkörper angehören, falls die Koeffizienten der Ausgangsfunktionen ihm bereits angehörten. — Sind die Koeffizienten eines Funktionals rationale Zahlen, so heißt das Funktional ein *rationales Funktional.*

Es sei ein Funktional $\omega = \omega_1$ gegeben. Substituiert man in ω_1 für die Koeffizienten die konjugierten Werte, die einem bestimmten der

unserem Zahlkörper konjugierten Körper angehören, so erhält man ein *konjugiertes Funktional.* Im ganzen erhalten wir also die n konjugierten Funktionale $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots \omega_n$. Ihr Produkt $N(\omega) = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$ ist ein rationales Funktional und heißt die *Norm* von ω. Das Funktional $\omega_2 \omega_3 \cdots \omega_n = \frac{N(\omega)}{\omega_1}$ gehört demselben Funktionalkörper wie ω_1 an.

Es sei uns nun ein Funktional ω gegeben, t eine Variable, die in ω nicht vorkommt; bilde ich dann zum Funktional $(t - \omega)$ die Norm, so hat dieses rationale Funktional die Gestalt

$$G(t) = N(t - \omega) = t^n + B_1 t^{n-1} + \cdots + B_n.$$

Hier sind die B_i rationale Funktionale, die die Variable t nicht enthalten, und es ist offenbar $G(\omega) = 0$. Jedes Funktional mit algebraischen Koeffizienten genügt also einer Gleichung n-ten Grades, in der die Koeffizienten rationale Funktionale sind und der Koeffizient der höchsten Potenz der Unbekannten gleich Eins ist.

Kann $G(t)$ nicht als Produkt zweier ganzen Funktionen von t dargestellt werden, deren Koeffizienten wieder rationale Funktionale sind, so heißt $G(t)$ im *Körper der rationalen Funktionale* irreduzibel. Ist aber $G(t)$ in dem soeben angegebenen Sinne zerlegbar, dann heißt $G(t)$ reduzibel; es genügt ω dann bereits einer Gleichung niedrigeren Grades. Die Gleichung niedrigsten Grades für ω mit Koeffizienten, die dem Körper der rationalen Funktionale angehören und deren höchster gleich Eins ist, sei $F(t) = 0$. Es zeigt sich dann, daß $F(t)$ irreduzibel und $N(t - \omega) = (F(t))^m$ ist; demnach ist der Grad von F ein Teiler von n.

Es sei R ein rationales Funktional. Dann läßt sich R in die Form setzen $R = r \frac{P_1}{P_2}$, wo P_1, P_2 primitive Funktionen und r eine positive rationale Zahl ist. *Es ergibt sich, daß die Zahl r und der Quotient $\frac{P_1}{P_2}$ durch R eindeutig bestimmt sind.* Wir nennen die positive Zahl r den *absoluten Betrag* von R und setzen $r = |R|$.

Sind R_1, R_2 rationale Funktionale, so folgt:

$$|R_1 R_2| = |R_1| \cdot |R_2|.$$

Sind ω, ω' zwei beliebige Funktionale, so ist stets:

$$N(\omega \omega') = N(\omega) \cdot N(\omega').$$

Man nennt nun den absoluten Betrag von $N(\omega)$ die *absolute Norm* von ω und setzt $N_a(\omega) = |N(\omega)|$; aus den obigen Formeln folgt daher

$$N_a(\omega\omega') = N_a(\omega) \cdot N_a(\omega').$$

Wir stellen jetzt folgende Definitionen*) auf:

I. *Ein rationales Funktional R heißt ganz, wenn $|R|$ eine ganze Zahl ist.*

Daraus folgt sofort, daß $R \pm R_1$, RR_1 ganz sind, falls R und R_1 ganz sind.

II. *Ein Funktional ω heißt ganz, wenn es die Wurzel einer Gleichung*

$$G(t) = t^m + R_1 t^{m-1} + \cdots + R_m = 0$$

ist, in der die Koeffizienten R_i ganze rationale Funktionale im Sinne der Definition I *sind.*

Hierzu ist zu bemerken**): 1. Ein nach II ganzes und außerdem rationales Funktional ist auch im Sinne von I ein ganzes rationales Funktional. 2. Ist ω nach II ganz, so hat die irreduzible Gleichung, der ω genügt, ebenfalls die Eigenschaft, daß ihre Koeffizienten im Sinne von I ganz sind, falls der höchste Koeffizient gleich Eins ist. 3. Sind ω, ω' ganz, so sind $\omega \pm \omega'$, $\omega\omega'$ auch ganz. 4. Ist das rationale Funktional R eine Zahl r, so ist $|r| = |R|$. Ein rationales ganzes Funktional, das eine Zahl ist, ist also eine rationale ganze Zahl. Daraus folgt, daß ein ganzes algebraisches Funktional, das eine Zahl ist, eine ganze algebraische Zahl ist.

Ist ω ganz, so ist $N_a(\omega)$ eine positive ganze Zahl.

III. *Sind α, β ganze Funktionale und ist auch $\alpha : \beta$ ganz, so heißt α durch β teilbar.*

Es folgt sofort: 1. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ alle durch β teilbar und $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ ganze Funktionale, so ist auch $\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \cdots + \alpha_r\xi_r$ durch β teilbar. 2. Ist α durch β und β durch γ teilbar, dann ist auch α durch γ teilbar.

IV. *Ist ε ein ganzes Funktional und auch $\frac{1}{\varepsilon}$ ganz, so heißt ε eine Einheit. Zwei ganze Funktionale, deren Quotient eine Einheit ist, heißen assoziiert.*

---

*) Erst werden hier die rationalen ganzen Funktionale und dann die algebraisch ganzen Funktionale definiert. Es läßt sich zeigen, daß man ganz allgemein unsere beiden Definitionen durch folgende Definition ersetzen kann: *ein Funktional ω heißt ganz, wenn eine primitive Funktion P existiert, so daß ωP eine ganze Funktion mit ganzen Koeffizienten ist.*

**) Die Beweise zu diesen Bemerkungen siehe A., S. 574 f.

Sind α, β assoziiert, so ist $\beta = \alpha\varepsilon$, wo ε eine Einheit ist. Sind $\varepsilon, \varepsilon'$ Einheiten, so sind auch $\varepsilon\varepsilon'$, $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ Einheiten.

Ein ganzes Funktional ε ist als Einheit völlig durch $N_a(\varepsilon) = 1$ charakterisiert*). Ist α durch β teilbar, so ist auch wegen $\alpha = \beta\gamma$ und $N_a(\alpha) = N_a(\beta)N_a(\gamma)$ die Zahl $N_a(\alpha)$ durch $N_a(\beta)$ teilbar. Jede primitive Funktion und ihr reziproker Wert ist eine Einheit. Ist ω ganz, so sind auch die konjugierten Funktionale ganz, also ist $N(\omega)$ durch ω teilbar. Nun ist aber $N(\omega) = N_a(\omega) \cdot \varepsilon$, wo ε als Quotient zweier primitiven Funktionen eine Einheit ist, also ist $N_a(\omega)$ mit $N(\omega)$ assoziiert, d. h. $N_a(\omega)$ durch $N(\omega)$, also auch durch ω teilbar. Zu jedem ganzen Funktional ω gibt es also ganze rationale Zahlen, die durch ω teilbar sind.

§ 2.

Ist uns ein ganzes Funktional ω gegeben, das die Variable x, aber nicht die Variable t enthält, so bleibt offenbar ω ganz, wenn wir in ω überall die Variable x durch die neue Variable t ersetzen. Diese einfache Bemerkung gestattet den Beweis folgenden Satzes**):

Satz I. *Ein Funktional* $\omega_0 t^r + \omega_1 t^{r-1} + \cdots + \omega_r$, *in dem die* ω_i *Funktionale sind, die die Variable* t *nicht enthalten, ist dann und nur dann ganz, wenn alle* ω_i *ganz sind.*

Beweis: Wenn alle ω_i ganz sind, so ist natürlich $\varphi(t) = \omega_0 t^r + \cdots + \omega_r$ ganz, da $\varphi(t)$ durch Addition und Multiplikation aus ganzen Funktionalen zusammengesetzt ist. Es sei nun umgekehrt $\varphi(t)$ ganz. Daß dann alle ω_i ganz sind, folgt so: Seien $t', t'', \ldots t^{(r)}$ nicht in $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_r$ vorkommende Variable, dann ist auch $\varphi(t'), \varphi(t''), \ldots$ ganz. Also ist

$$\begin{aligned} \omega_0 t^r + \cdots + \omega_r &= \varphi(t) = \varphi_0, \\ \omega_0 t'^r + \cdots + \omega_r &= \varphi(t') = \varphi_1, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Das sind $r+1$ Gleichungen für die Unbekannten $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_r$. Die Determinante dieses Systems ist das Differenzenprodukt der Variablen

*) A., S. 580.

**) Vgl. A., S. 590. *Weber* benutzt zum Beweise den Hauptsatz der Theorie, daß jedes ganze Funktional eindeutig in Primfunktionale zerlegbar ist.

$t, t', \dots t^{(r)}$, also als Produkt primitiver Funktionen eine Einheit ε. Daraus folgt, da sich $\omega_i \varepsilon$ als Summe von Produkten ganzer Funktionale ergibt, daß ω_i selbst ein ganzes Funktional ist.

Wenn ein Funktional ϑ gegeben ist, das einer Gleichung mit rationalen Funktionalen als Koeffizienten genügt, so ist es durch Multiplikation mit einer rationalen Zahl möglich, diese Gleichung auf die Form $A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \dots + A_m = 0$ zu bringen, wo die A_i ganze rationale (von t freie) Funktionale sind und die Zahlen $|A_0|, |A_1|, \dots |A_m|$ den größten gemeinsamen Teiler 1 haben.

Satz II: *Sind $A_0, A_1, \dots A_m$ ganze rationale Funktionale, t eine nicht in ihnen vorkommende Variable und $(|A_0|, |A_1|, \dots |A_m|) = 1$, dann ist $A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \dots + A_m$ eine Einheit.*

Beweis: $A_0 t^m + \dots + A_m = \omega$ ist ein ganzes rationales Funktional, $|\omega| = a$ eine positive ganze Zahl, daher ist $\frac{\omega}{a} = \frac{A_0}{a} t^m + \frac{A_1}{a} t^{m-1} + \dots + \frac{A_m}{a}$ ganz. Also ist nach dem ersten Satze dieses Paragraphen für $i = 0, 1, \dots m$ das Funktional $\frac{A_i}{a}$ ein ganzes rationales Funktional, d. h. $|A_i|$ durch a teilbar; da aber die $|A_i|$ nach Voraussetzung teilerfremd sind, folgt $a = 1$, d. h. ω ist eine Einheit. — Ist in der Gleichung $A_0 t^m + \dots + A_m = 0$, der ϑ genügt, A_0 eine Einheit, so ist ϑ ganz; ist aber A_m eine Einheit, so ist $\frac{1}{\vartheta}$ ganz. Wir beweisen nun den

Satz III: *Ist ϑ irgend ein Funktional, u eine nicht in ϑ vorkommende Variable, so ist $\frac{1}{\vartheta + u}$ ein ganzes Funktional.*

Beweis: Die Gleichung, der ϑ genügt, sei $A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \dots + A_m = 0$. Hierin seien die A_i ganze rationale Funktionale, deren absolute Beträge teilerfremd sind. Sei u eine nicht in den A_i, also auch nicht in ϑ vorkommende Variable, so setze man $\vartheta = u + \omega$. Man ordne dann die Gleichung $A_0 (u + \omega)^m + \dots + A_m = 0$ nach Potenzen von ω. Wir erhalten:

$$A_0 \omega^m + \omega^{m-1} (m u A_0 + A_1) + \dots + (A_0 u^m + A_1 u^{m-1} + \dots + A_m) = 0.$$

Hier sind alle Koeffizienten ganz und nach dem letzten Satz das von ω freie Glied eine Einheit, also ist $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\vartheta - u}$ ganz. Folglich ist auch $\frac{1}{u - \vartheta}$ ganz für jedes ϑ; daher ist auch $\frac{1}{u + \vartheta}$ ein ganzes Funktional.

Aus diesem Satze nun folgt:

Satz IV: *Sind* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$ *ganze Funktionale, in denen die Variablen* $x_1, x_2, x_3, \ldots x_r$ *nicht vorkommen, so hat* $\delta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r$ *die beiden Eigenschaften:* 1. δ *ist durch jeden gemeinsamen Teiler der* α_i *teilbar.* 2. δ *ist selbst ein gemeinsamer Teiler der* α_i.

Jedem mit δ assoziierten Funktional kommen dieselben Eigenschaften zu. Daher nennt man δ und jedes zu δ assoziierte Funktional *größten gemeinsamen Teiler* der α_i.

Beweis: Da δ eine Linearform der α_i ist, so ist die erste Behauptung selbstverständlich. Man setze $\frac{\delta - \alpha_i x_i}{\alpha_i} = \vartheta_i$; dann enthält ϑ_i die Variable x_i nicht, da x_i weder in $\delta - \alpha_i x_i$ noch in α_i vorkommt. Also ist nach III das Funktional $\frac{1}{\vartheta_i + x_i} = \frac{\alpha_i}{\delta}$ ganz. Damit ist IV bewiesen.

An diesen Satz schließt sich nun die Definition der *teilerfremden Funktionale* und der *Primfunktionale* in bekannter Weise an*). Und dann beweist man genau wie in der Theorie der rationalen Zahlen den Satz, daß *jedes ganze Funktional eindeutig in endlich viele Primfaktoren zerlegbar ist* („eindeutig" bedeutet dabei eben, daß assoziierte Primfaktoren als nicht verschieden angesehen werden)**).

Rechne ich assoziierte Teiler eines Funktionals als nicht verschieden, so folgt aus der eindeutigen Zerlegung in Primfaktoren, daß jedes ganze Funktional nur endlich viele Teiler hat. Und hieraus folgt

Satz V: *Ein Funktional* α *geht in ein assoziiertes über, wenn die Variablen anders bezeichnet werden****).

Beweis: Man braucht den Satz nur für ganze α zu beweisen, da jedes gebrochene Funktional ein Quotient zweier ganzen Funktionale ist. Es sei α ganz. Die positive ganze rationale Zahl $N_a(\alpha)$ ist durch α teilbar. Das Funktional $\frac{N_a(\alpha)}{\alpha}$ ist ganz und bleibt ganz, wenn die Variablen, die ja nur im Nenner α auftreten, anders bezeichnet werden. Da ich die Bezeichnung auf *beliebig viele* Arten ändern kann, $N_a(\alpha)$ aber nur *endlich viele* Teiler hat, so folgt, daß bei dieser Änderung der Bezeichnung der Nenner nur in assoziierte Funktionale übergeht. Durch Kombination dieses Satzes mit Satz I erhält man

*) A., S. 583ff. **) A., S. 586f. ***) A., S. 593.

Satz VI: *Sind* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r$ *ganze Funktionale, die die Variable* y *nicht enthalten, so ist* $\alpha_0 y^r + \alpha_1 y^{r-1} + \cdots + \alpha_r$ *der größte gemeinsame Teiler der* α_i.

Beweis: Es sei y' eine von y verschiedene und nicht in den α_i vorkommende Variable; dann ist $\delta = \varphi(y) = \alpha_0 y^r + \cdots + \alpha_r$ nach Satz V mit $\delta' = \varphi(y')$ assoziiert und $\delta' : \delta$ daher eine Einheit. $\delta' : \delta$ ist nun eine ganze Funktion von y' und als Einheit ein ganzes Funktional. Nach Satz I sind also alle Koeffizienten $\alpha_i : \delta$ ganz. Also ist δ ein gemeinsamer Teiler aller α_i und ist somit der größte gemeinsame Teiler, da δ ja wegen seiner Form offensichtlich durch jeden anderen gemeinsamen Teiler der α_i teilbar ist.

Dieser Satz liefert nun sofort den folgenden

Satz VII: *Sind* $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ *irgend welche ganzen oder gebrochenen Funktionale, die die Variable* y *nicht enthalten, so ist* $\dfrac{1}{y^r + \beta_1 y^{r-1} + \cdots + \beta_r}$ *ein ganzes Funktional.*

Für rationale β_i ist das eine Folgerung aus II. Satz VII geht für $r = 1$ in Satz III über und kann auch rückwärts zum Beweise von VI verwendet werden.

§ 3.

Die Eindeutigkeit der Zerlegung jedes ganzen Funktionals in Primfunktionale stützt sich wesentlich auf die Darstellung des größten gemeinsamen Teilers durch eine Linearform. Und diese letzte Tatsache ist eine fast triviale Folgerung aus III. Für die Theorie ist also Satz III (oder auch die Verallgemeinerung VII) von fundamentaler Bedeutung. Bevor wir nun das eigentliche Wesen dieser beiden Sätze näher beleuchten, mögen noch einige Bemerkungen hier ihren Platz finden.

1. Der Satz III ist äquivalent dem Satz: Es ist stets $\dfrac{1}{\vartheta u + 1}$ *ganz*, falls u eine nicht in ϑ vorkommende Variable ist. Dem Satze VII entspricht das Resultat: Enthalten die Funktionale $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{r-1}$ die Variable y nicht, so ist $\dfrac{1}{\beta_0 y^r + \beta_1 y^{r-1} + \cdots + \beta_{r-1} y + 1}$ ein *ganzes* Funktional.

2. Sind $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_r$ ganze Funktionale, die y nicht enthalten, so ist $\beta_0 y^r + \beta_1 y^{r-1} + \cdots + \beta_r$ ganz. Ist β_0 oder β_r eine Einheit, so folgt nach VII, daß auch der reziproke Wert von $\beta_0 y^r + \cdots + \beta_r$ ganz ist; also

ist dann $\beta_0 y^r + \cdots + \beta_r$ eine Einheit. Diese Tatsache folgt direkt aus der Betrachtung von $N(\beta_0 y^r + \cdots + \beta_r)$ unter Heranziehung von Satz II.

Wir sprechen nun folgenden Satz aus:

Satz VIII: *Es seien $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r$ ganze Funktionale, ϑ irgend ein Funktional und u eine in $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r; \vartheta$ nicht vorkommende Variable. Es werde $G(u) = \alpha_0 u^r + \alpha_1 u^{r-1} + \cdots + \alpha_r$ gesetzt. Ist dann $G(\vartheta)$ ein ganzes Funktional, so hat der Quotient $\frac{G(u)}{u - \vartheta}$ nach Ausführung der Division ganze Koeffizienten. Das tritt insbesondere stets dann ein, wenn ϑ eine Wurzel der Gleichung $G(u) = 0$ ist.*

Beweis: Es sind $G(u)$ und $G(\vartheta)$ nach Voraussetzung ganz, also auch $G(u) - G(\vartheta)$. Weiter ist nach Satz III auch $\frac{1}{u - \vartheta}$ ganz und daher ist auch $(G(u) - G(\vartheta)) \cdot \frac{1}{u - \vartheta} = \frac{G(u) - G(\vartheta)}{u - \vartheta}$ ein ganzes Funktional. Dieses Funktional hat aber die Form $\alpha_0 u^{r-1} + \beta_1 u^{r-2} + \cdots + \beta_{r-1}$, wo die β_i die Variable u nicht enthalten. Also sind die β_i nach Satz I ganz.

Damit ist aus Satz III jener Satz gewonnen, der für den Fall, in dem $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r, \vartheta$ *Zahlen* sind, von *Hurwitz* zuerst für die Idealtheorie nutzbar gemacht worden ist. Wegen der Bedeutung dieses Satzes, aus dem übrigens umgekehrt Satz III folgt, und *der daher mit Satz* III *äquivalent ist*, teilen wir für ihn außer dem obigen Beweis noch zwei weitere Beweise mit, deren ersten man *E. Steinitz* verdankt. Ich bemerke dazu, daß ein Funktional ϑ ganz ist, wenn es die Wurzel einer Gleichung $u^r + \alpha_1 u^{r-1} + \cdots + \alpha_r = 0$ ist, in der die α_i ganz sind; genügt ϑ aber einer Gleichung $\alpha_0 u^r + \alpha_1 u^{r-1} + \cdots + \alpha_r = 0$, in der die Koeffizienten α_i ganz sind, so ist $\alpha_0 \vartheta$ ganz*).

Es genüge also das Funktional ϑ der Gleichung $G(\vartheta) = \alpha_0 \vartheta^r + \alpha_1 \vartheta^{r-1} + \cdots + \alpha_r = 0$, in der die α_i ganz sind; dann geht die Division von $G(u)$ durch $(u - \vartheta)$ auf und es ist zu zeigen, daß *die ganze rationale Funktion $\frac{G(u)}{u - \vartheta}$ ganze Koeffizienten hat.*

Beweis 1 *(Steinitz):* Ist $G(u)$ vom Grade 1, dann ist $G(u) : (u - \vartheta) = \alpha_0$ eine ganze Zahl, der Satz also bewiesen. Es sei der Satz bereits für jede Funktion des Grades $1, 2, \ldots r - 1$ als richtig erkannt. Es ist

*) A., S. 577.

identisch $G(u) = \alpha_0 u^{r-1}(u - \vartheta) + G_{r-1}(u)$. Hier ist $G_{r-1}(u)$ eine Funktion, deren Grad *kleiner* als r ist; da α_0 und $\alpha_0 \vartheta$ ganz sind, so hat $G_{r-1}(u) = G(u) - \alpha_0 u^{r-1}(u - \vartheta)$ ganze Koeffizienten und außerdem ist $G_{r-1}(\vartheta) = 0$. Nach Annahme ist daher $G_{r-1}(u) = (u - \vartheta)(\gamma_0 u^{r-2} + \cdots + \gamma_{r-2})$, wo die γ_i ganze Funktionale sind. Also hat auch $G(u) : (u - \vartheta) = \alpha_0 u^{r-1} + \gamma_0 u^{r-2} + \cdots + \gamma_{r-2}$ ganze Koeffizienten.

Beweis 2: Es sei $G(u) : (u - \vartheta) = \varepsilon_0 u^{r-1} + \varepsilon_1 u^{r-2} + \cdots + \varepsilon_{r-1}$. Dann ist $\varepsilon_0 = \alpha_0$ ganz und $\varepsilon_s - \alpha_s = \vartheta \varepsilon_{s-1}$ für $s = 1, 2, \ldots r-1$ und $\alpha_r = -\vartheta \varepsilon_{r-1}$. Die Gleichung, der $\frac{1}{\vartheta}$ genügt, hat als höchsten Koeffizienten α_r, also ist $\alpha_r \cdot \frac{1}{\vartheta} = \frac{\alpha_r}{\vartheta} = -\varepsilon_{r-1}$ ganz. ϑ genügt also der Gleichung

$$\alpha_0 \vartheta^r + \cdots + \alpha_{r-1}\vartheta - \vartheta \varepsilon_{r-1} = 0$$

oder, da $\vartheta \neq 0$ ist,

$$\alpha_0 \vartheta^{r-1} + \alpha_1 \vartheta^{r-2} + \cdots + \alpha_{r-2}\vartheta - (\varepsilon_{r-1} - \alpha_{r-1}) = 0.$$

Diese Gleichung $(r-1)$-ten Grades hat ganze Koeffizienten, und es ist $\frac{\varepsilon_{r-1} - \alpha_{r-1}}{\vartheta} = \varepsilon_{r-2}$ ganz. Setzt man jetzt für $\varepsilon_{r-1} - \alpha_{r-1}$ den Wert $\varepsilon_{r-2}\vartheta$ ein und dividiert dann wieder durch ϑ, so erschließt man ε_{r-3} als ganz usw.

Dieser Satz liefert in Verbindung mit Satz II sofort Satz III.

Beweis: Es sei ϑ ein Funktional. Eine der Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, der ϑ genügt, sei $G(u) = A_0 u^r + A_1 u^{r-1} + \cdots + A_r = 0$, wo wir die A_i als ganze rationale Funktionale annehmen dürfen, die teilerfremde absolute Beträge haben und die Variable u nicht enthalten. Dann hat $\frac{G(u)}{u - \vartheta}$ also ganze Koeffizienten und ist daher ein ganzes Funktional $\varphi(u)$. Nach Satz II ist $G(u)$ eine Einheit, also ist $\frac{1}{u - \vartheta} = \frac{1}{G(u)} \cdot \varphi(u)$ auch ganz. —

Aus Satz VII folgt

Satz IX: *Es seien $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ ganze, $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ irgend welche Funktionale, die sämtlich die Variable u nicht enthalten. Ist die ganze Funktion $G(u) = \alpha_0 u^m + \cdots + \alpha_m$ dann ohne Rest durch die ganze Funktion $g(u) = u^r + \beta_1 u^{r-1} + \cdots + \beta_r$ teilbar, so hat die ganze Funktion $G(u) : g(u)$ ganze Koeffizienten.*

Beweis: $G(u) : g(u) = G(u) \cdot \frac{1}{g(u)}$ ist nach VII ein ganzes Funktional, das in bezug auf u eine ganze Funktion ist und nach Satz I daher ganze Funktionale als Koeffizienten hat.

Für den Fall, daß $g(u)$ im Funktionalkörper total zerfällt, d. h. daß $g(u) = (u - \vartheta_1)(u - \vartheta_2) \cdots (u - \vartheta_r)$ ist, wo $\vartheta_1, \ldots \vartheta_r$ Funktionale unseres Körpers sind, folgt IX sofort durch wiederholte Anwendung von VIII. Da $g(u)$ aber nicht immer zerfällt, ist ein von VII unabhängiger Beweis des Satzes IX nicht unmittelbar aus VIII zu entnehmen. Dieser Fall ist indessen ohne Benutzung von Satz VII durch *Kronecker*, *Dedekind* und *Hurwitz**) sichergestellt. Aus Satz IX folgt nun umgekehrt sofort Satz VII.

Beweis: Für jedes Funktional ω ist stets $\frac{N(\omega)}{N_a(\omega)}$ eine Einheit. Also ist die in bezug auf u ganze Funktion $\varphi(u) = \frac{N(g(u))}{N_a(g(u))}$ als Einheit ein ganzes Funktional und hat somit nach Satz I ganze Koeffizienten. Aus der Definition von $\varphi(u)$ folgt, daß $\varphi(u) : g(u)$ eine ganze Funktion von u ist, die nach IX ganze Koeffizienten hat, da $\varphi(u)$ solche besitzt. Somit ist $\varphi(u) : g(u)$ ein ganzes Funktional und daher auch $1 : g(u)$, da $\varphi(u)$ eine Einheit ist. — Die beiden Sätze VII und IX sind also äquivalent.

*) *Kronecker*, Sitzungsber. d. K. preuß. Akademie, Berlin, 1883, S. 957; *Dedekind*, Mitteilungen der deutschen mathem. Ges. in Prag. 1892; *Hurwitz*, Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss., Göttingen, 1895. (Über einen Fundamentalsatz etc.) Ferner vgl. *König*, Einl. in die allgemeine Theorie der algebr. Größen. 1903, S. 74 ff.

Reihenentwicklungen und Konvergenzuntersuchungen betreffend die *Schapira*sche Iteration.

Von Herrn *Ludwig v. Dávid* in Klausenburg.

Einleitung.

In Bd. 135 dieses Journals*) habe ich mich unter dem Titel „Zur Theorie der *Schapira*schen Iteration“ mit dem folgenden algebraischen Algorithmus beschäftigt:

Es seien ${}^{(0)}a_1, {}^{(0)}a_2, \dots {}^{(0)}a_n$ beliebig gegebene komplexe Zahlen und es sei die unendliche Matrix:

$$(1.)\qquad \begin{array}{l} {}^{(0)}a_1, {}^{(0)}a_2, \dots {}^{(0)}a_n \\ {}^{(1)}a_1, {}^{(1)}a_2, \dots {}^{(1)}a_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ {}^{(i)}a_1, {}^{(i)}a_2, \dots {}^{(i)}a_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

von der Beschaffenheit, daß die Identitäten in bezug auf x

$$(2.)\qquad \begin{aligned} x^n - (n)_1 {}^{(i+1)}a_1 x^{n-1} + (n)_2 {}^{(i+1)}a_2^2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n (n)_n {}^{(i+1)}a_n^n \\ \equiv (x - {}^{(i)}a_1)(x - {}^{(i)}a_2) \cdots (x - {}^{(i)}a_n) \end{aligned} \qquad {}^{(i=0,1,2,\dots)}$$

gelten sollen, wobei $(n)_\nu = \binom{n}{\nu}$.

Die Elemente der Matrix mögen also der algebraischen Iteration

$$(3.)\qquad {}^{(i+1)}a_\nu^\nu = \frac{1}{(n)_\nu} \Sigma {}^{(i)}a_{r_1} {}^{(i)}a_{r_2} \cdots {}^{(i)}a_{r_\nu} \qquad {}^{(\nu=1,2,\dots n;\ i=0,1,2,\dots)}$$

genügen, wo die Summation im Sinne von (2.) auf sämtliche Systeme $r_1, r_2, \dots r_\nu$ und nur auf solche auszudehnen ist, welche aus den Elementen $1, 2, \dots n$ ohne Wiederholung zu bilden sind und die von ein-

*) S. 62—74.

ander nicht nur in der Reihenfolge ihrer Elemente sich unterscheiden. Unter dem Summationszeichen gibt es daher $(n)_\nu$ Glieder ν-ter Dimension.

An der erwähnten Stelle*) habe ich nachgewiesen, daß die Grenzwerte $\lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_\nu$ *bei beliebiger*, nur der Gleichung (3.) entsprechenden Wahl der Wurzeln existieren und daß

$$\lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_1 = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_2 = \cdots = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_n. \tag{4.}$$

Abgesehen von dem Falle, daß unter den a_ν**) die Null $(n-1)$-mal vorkommt, wird in der Tat die Matrix (1.) durch die Anfangselemente a_ν nicht eindeutig bestimmt, wegen der aus (3.) sich ergebenden Wurzelzeichen. Daher ist der sub (4.) definierte Limes eine *mehrdeutige* Funktion der Elemente a_ν. Ich verwende für sie die (von *Gauß* im Falle $n=2$ benutzte) Bezeichnung $M(a_1, a_2, \ldots a_n)$. Einige ihrer Eigenschaften findet man a. a. O. Wir erwähnen hier die folgenden:

α) $$|M(a_1, a_2, \ldots a_n)| \leqq \text{Max.}(|a_1|, |a_2|, \ldots |a_n|).$$

β) M ist eine symmetrische, homogene Funktion vom ersten Grade ihrer Elemente.

γ) Bei beliebig gegebenen a_ν kann der Forderung $M=0$ durch geeignete Wahl der Wurzelzeichen genügt werden.

Wir können hier noch hinzufügen***):

δ) Die zu gegebenen $a_1, a_2, \ldots a_n$ gehörigen Werte $M(a_1, a_2, \ldots a_n)$ bilden eine im allgemeinen unendliche Menge. Abgesehen von Fällen, wo diese Menge endlich ist, ist die Nullstelle Häufungsstelle von ihr. — Die vorliegende Arbeit besteht aus drei Teilen.

Im *ersten Teile* weise ich nach, daß nicht nur ein Vorwärtsschreiten längs der Matrix (1.) zum gemeinsamen Limes führt, sondern, daß ein Grenzwert auch angenähert wird, wenn die Matrix (1.) irgendwo abgebrochen und der Algorithmus mit n, im übrigen beliebigen Elementen der abgebrochenen endlichen Matrix fortgesetzt, die neue Matrix wieder irgendwo abgebrochen wird, usw.

*) S. 65—71.

**) Ich will im folgenden statt ${}^{(0)}a_\nu$ einfach a_ν setzen.

***) Wir formulieren den Satz nur zum Zwecke einer allgemeinen Orientierung. Vgl. im übrigen einen demnächst in den „Math. u. Naturwissensch. Berichten aus Ungarn“ erscheinenden Aufsatz des Autors: Sur une application des fonctions modulaires à la théorie de la moyenne arithmético-géométrique.

Der Inhalt dieses Teiles gehört wohl zu der in der Überschrift angedeuteten Konvergenzuntersuchung, hängt aber mit den weiteren Teilen dieser Arbeit nicht zusammen. Ich befasse mich mit dieser *sprungweisen* Iteration, da neuerdings Fräulein *L. Tonelli**) mit dem in (4.) ausgedrückten Resultat meiner Arbeit sich beschäftigt hat und nachweist, daß (4.) bei einer durch sie eingeführten merkwürdigen Verallgemeinerung des Algorithmus (3.) bestehen bleibt. Ich glaube, daß neben der *Tonelli*schen so weitgehenden Verallgemeinerung auch dieser, durch die sprungweise Iteration geleisteten, ein Interesse zukommt, namentlich in Hinblick auf die *algebraische* Bedeutung der *Schapira*schen Iteration, worauf ich im Laufe meiner Arbeit noch zurückkomme.

Im *zweiten Teile* wird die Annäherung an $M(a_1, a_2, \ldots a_n)$ unter der Voraussetzung untersucht, daß die a_ν Potenzreihen von p Variabeln $z_1, z_2 \ldots z_p$ sind. Es wird nachgewiesen, daß M selbst eine Potenzreihe von $z_1, z_2, \ldots z_p$ ist, und es wird ein einfaches Gesetz für die Herleitung der Koeffizienten von M aus den Koeffizienten der ${}^{(i)}a_\nu(z_1, z_2, \ldots z_p)$ angegeben. Daselbst beschäftige ich mich auch mit den *Inversen* dieser Potenzreihen, wobei sich entsprechende einfache Gesetzmäßigkeiten herausstellen.

Im *dritten Teile* werden die zu den formellen Ergebnissen des zweiten Teiles gehörigen *Konvergenzuntersuchungen* in Angriff genommen und in gewissem Sinne durchgeführt. Bei dieser Untersuchung spielt die Frage der *absolut kleinsten Wurzel* gewisser Potenzreihen die entscheidende Rolle, und mit den erlangten Resultaten läßt sich ein von *Gauß* und später von Herrn *v. Mangoldt* behandelter Fall mit einem Schlage erledigen**).

I. Konvergenz bei der sprungweisen Iteration.

1. Denken wir uns die Matrix (1.) der Einleitung bei der $(i_1 + 1)$-ten Zeile abgebrochen. Wir wählen *irgendwie* n Elemente aus dem ni_1-gliedrigen Schema:

---

*) Atti della Reale Accad. dei Lincei, XIX, 1° Semestr. (1910) p. 676—681. Giorn. di matemat. di Battaglini, XLVIII, (1910) p. 341—373.

**) Einige Resultate dieser Arbeit sind in den Berichten der III. Klasse der Ungarischen Akademie d. Wissenschaften (in ung. Sprache) 1909, 1911 veröffentlicht worden.

$$\begin{matrix} {}^{(1)}a_1, {}^{(1)}a_2, \dots {}^{(1)}a_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ {}^{(i_1)}a_1, {}^{(i_1)}a_2, \dots {}^{(i_1)}a_n, \end{matrix}$$

das also entstand, indem die erste Zeile der Matrix fortgelassen wurde. Die ausgewählten Elemente mögen ${}^{(0)}b_1, {}^{(0)}b_2, \dots {}^{(0)}b_n$ heißen. Wir lassen auch die Möglichkeit zu, daß dasselbe Element unter den ${}^{(0)}b_\nu$ mehrfach vorkommt.

Ausgehend von den Elementen ${}^{(0)}b_\nu$, wenden wir den Algorithmus (3.) an und brechen die hervorgehende Matrix bei ihrer (i_2+1)-ten Zeile ab. Lassen wir auch aus ihr die erste Zeile fort, so entsteht

$$\begin{matrix} {}^{(1)}b_1, {}^{(1)}b_2, \dots {}^{(1)}b_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ {}^{(i_2)}b_1, {}^{(i_2)}b_2, \dots {}^{(i_2)}b_n ; \end{matrix}$$

aus ihr werden mit derselben Freiheit n Elemente ${}^{(0)}c_1, {}^{(0)}c_2, \dots {}^{(0)}c_n$ ausgewählt. Diese sollen Anlaß zur Bildung einer Matrix von i_3+1 Zeilen geben; usw. Die unendliche Folge der ganzen positiven Zahlen

$$i_1, i_2, i_3, \dots$$

kann beliebig gewählt werden.

Wir schreiben zum Zwecke besserer Übersicht

$$a_\nu = \alpha_\nu, {}^{(0)}b_\nu = \alpha_\nu^{(1)}, {}^{(0)}c_\nu = \alpha_\nu^{(2)}, \dots \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

Die Matrix der sukzessive ausgewählten Elemente ist

$$(1.) \qquad \begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \\ \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots \alpha_n^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \dots \alpha_n^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix}$$

Die in der Einleitung angekündigte Verallgemeinerung von (4.) besteht nun in dem Nachweise, daß die Grenzwerte $\lim_{i=\infty} \alpha_\nu^{(i)}$ existieren und daß

$$(2.) \qquad \lim_{i=\infty} \alpha_1^{(i)} = \lim_{i=\infty} \alpha_2^{(i)} = \dots = \lim_{i=\infty} \alpha_n^{(i)}.$$

Nimmt man immer die Elemente der ersten Zeile in den sukzessiven endlichen Matrizen, so wird die Matrix (1.) zur Matrix (1.) der Einleitung. Auch hier ist freilich der Grenzwert (2.) eine *mehrdeutige* Funktion der a_ν. Außerdem hängt er von der Art, wie die Elemente sukzessive herausgegriffen werden, ab.

Der Beweis kann wie folgt geführt werden.

2. Durch Übergang zu den absoluten Werten erhält man aus (3.) der Einleitung

$$|{}^{(i+1)}a_\nu^\nu| \leqq \frac{1}{(n)_\nu} \Sigma |{}^{(i)}a_{r_1} {}^{(i)}a_{r_2} \cdots {}^{(i)}a_{r_\nu}| . \qquad (\nu=1,2,\ldots n;\ i=0,1,2,\ldots)$$

Da die $(n)_\nu$-gliedrige rechte Seite homogen von der ν-ten Dimension ist, hat man

$$\text{Max.} |{}^{(i+1)}a_\nu| \leqq \text{Max.} |{}^{(i)}a_\nu| . \qquad (\nu=1,2,\ldots n)$$

Infolge dieser Ungleichung existiert

$$\lim_{i=\infty} \text{Max.} |{}^{(i)}a_\nu| .$$

Aus der Bedeutung der $\alpha_\nu^{(i)}$ folgt, daß auch für sie

(3.) $$\text{Max.} |\alpha_\nu^{(i+1)}| \leqq \text{Max.} |\alpha_\nu^{(i)}|$$

ist, und daß daher

(4.) $$\lim_{i=\infty} \text{Max.} |\alpha_\nu^{(i)}| = r$$

existiert.

Ist $r = 0$, so ist (2.) evident.

Nun sei $r > 0$. Ich zeige zunächst, daß die $\lim_{i=\infty} |\alpha_\nu^{(i)}|$ existieren und daß

(5.) $$\lim_{i=\infty} |\alpha_1^{(i)}| = \lim_{i=\infty} |\alpha_2^{(i)}| = \cdots = \lim_{i=\infty} |\alpha_n^{(i)}| .$$

3. Wir setzen

$$\text{Max.} |\alpha_\nu^{(i)}| = M_i, \quad \text{Min.} |\alpha_\nu^{(i)}| = m_i \qquad (\nu=1,2,\ldots n)$$

und unterscheiden zwei Fälle.

a) Es existiert eine Größe I so, daß

$$m_i \geqq r,$$

wenn nur $i > I$.

In diesem Falle folgt aus

$$M_i \geqq M_{i+1} \geqq m_{i+1} \geqq r \qquad (i > I)$$

mit Rücksicht auf (4.) unmittelbar (5.).

b) Es existiert keine Größe I, d. h. es gibt bei beliebig gegebenem I ein i, wofür

$$m_i < r \text{ und } i > I.$$

In diesem Falle würde (5.) nur dann nicht bestehen, wenn es eine positive, von i unabhängige Größe ϱ gibt, für welche

(6.) $$m_i \leqq r - \varrho$$

ist, wenigstens für ein $i > I$, wo I beliebig vorgeschrieben wurde. Dieser

Fall kommt jedoch in Wirklichkeit nicht vor, wie aus dem folgenden hervorgeht.

4. Denken wir uns die Matrix hingeschrieben, deren erste Zeile

$$\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots \alpha_n^{(i)}$$

ist. Ist nun

$$\left| \frac{1}{(n)_\nu} \Sigma \alpha_{r_1}^{(i)} \alpha_{r_2}^{(i)} \cdots \alpha_{r_\nu}^{(i)} \right|$$

das absolut größte Glied der zweiten Zeile dieser Matrix (oder eines der absolut gleichgroßen Glieder), so hat man nach (3.)

$$M_{i+1}^{\nu} \leqq \frac{1}{(n)_\nu} \Sigma \left| \alpha_{r_1}^{(i)} \alpha_{r_2}^{(i)} \cdots \alpha_{r_\nu}^{(i)} \right| .$$

Auf der rechten Seite separiere ich die Glieder, in denen m_i vorkommt. Ich schreibe kurz

$$M_{i+1}^{\nu} \leqq \frac{1}{(n)_\nu} (m_i \Sigma + \Sigma).$$

Setzt man in dieser Ungleichung M_i für jedes $|\alpha_\nu^{(i)}|$, so hat man a fortiori

$$M_{i+1}^{\nu} \leqq \frac{1}{(n)_\nu} (m_i (n-1)_{\nu-1} M_i^{\nu-1} + (n-1)_\nu M_i^{\nu}).$$

Hieraus folgt durch einfache Rechnung

$$n M_{i+1}^{\nu} \leqq \nu m_i M_i^{\nu-1} + (n-\nu) M_i^{\nu}.$$

Nun bedeute i eben den Index, für welchen (6.) besteht. Da nun

$$m_i \leqq r - \varrho \leqq M_i - \varrho$$

ist, so folgt

$$\nu \varrho M_i^{\nu-1} \leqq n(M_i^{\nu} - M_{i+1}^{\nu}).$$

Aus der Identität

$$M_i^{\nu} - M_{i+1}^{\nu} = (M_i - M_{i+1})(M_i^{\nu-1} + M_i^{\nu-2} M_{i+1} + \cdots + M_{i+1}^{\nu-1})$$

folgt, da $M_i \geqq M_{i+1}$ ist,

$$M_i^{\nu} - M_{i+1}^{\nu} \leqq \nu M_i^{\nu-1} (M_i - M_{i+1}).$$

Somit ist

$$\nu \varrho M_i^{\nu-1} \leqq n \nu M_i^{\nu-1} (M_i - M_{i+1}).$$

Infolge der am Ende von 2. gemachten Voraussetzung ist $r > 0$, also da $M_i \geqq r$ ist, auch $M_i > 0$. Folglich ist

$$\varrho \leqq n(M_i - M_{i+1}), \text{ oder}$$

$$M_i - M_{i+1} \geqq \frac{\varrho}{n}. \tag{7.}$$

Die Ungleichung (7.) ist also eine Folge von (6.). Nun besteht (6.) für unendlichviele i (da I beliebig), andererseits hätte man aus (3.) und (4.)

$$M_0 \geqq M_1 \geqq \cdots \geqq M_i \geqq \cdots \text{ in inf. } \geqq r.$$

Demnach sind wir aber gemäß (7.) zu dem Widerspruch gelangt, daß für den k-ten der Bedingung (6.) genügenden Wert i_k

$$M_{i_k} < r \text{ ist, wo } k \geqq E\left(\frac{M_0 - r}{\varrho : n}\right) + 1,$$

und wo $E(x)$ in bekannter Weise die in x enthaltene größte ganze Zahl bedeutet. Die Ungleichung (6.) ist also unmöglich, und damit ist (5.) in allen Fällen bewiesen.

5. Daß auch die Grenzwerte $\lim_{i=\infty} \operatorname{arc} \alpha_\nu^{(i)}$ existieren und der Gleichung

$$(8.) \qquad \lim_{i=\infty} \operatorname{arc} \alpha_1^{(i)} = \lim_{i=\infty} \operatorname{arc} \alpha_2^{(i)} = \cdots = \lim_{i=\infty} \operatorname{arc} \alpha_n^{(i)}$$

genügen, wenn z. B.

$$0 \leqq \operatorname{arc} \alpha_\nu^{(i)} < 2\pi$$

genommen wird, daß also (5.) zu (2.) ergänzt werden kann, können wir jetzt in einigen Zeilen beweisen.

Ist i hinreichend groß, so kommen nicht nur die $|\alpha_\nu^{(i)}|$ der Matrix*)

$$\begin{matrix} \alpha_1^{(i)}, & \alpha_2^{(i)}, \ldots & \alpha_n^{(i)} \\ {}^{(1)}\alpha_1^{(i)}, & {}^{(1)}\alpha_2^{(i)}, \ldots & {}^{(1)}\alpha_n^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ {}^{(\lambda)}\alpha_1^{(i)}, & {}^{(\lambda)}\alpha_2^{(i)}, \ldots & {}^{(\lambda)}\alpha_n^{(i)} \end{matrix}$$

in beliebige Nähe des r, sondern (ihren absoluten Werten nach) auch alle Elemente der Matrixzeilen, aus denen die $\alpha_\nu^{(i+1)}$ herausgegriffen wurden. Sogar: wenn die σ-te die letzte Zeile derjenigen ist, aus welchen $\alpha_\nu^{(i+1)}$ herausgegriffen wurde, so gilt von sämtlichen Elementen der σ ersten Zeilen dieselbe Behauptung.

Auf Grund dieser Überlegung kann der Beweis von (8.) ohne weiteres in derselben Weise geführt werden, wie ich in meiner erwähnten Arbeit**) den Beweis der analogen Gleichungen geliefert habe.

Hiermit haben wir:

Satz I. *Die sprungweise algebraische Iteration führt zu gemeinsamen Grenzwerten.*

II. Reihenentwicklungen.

1. In diesem Teile verfahren wir rein formell. Konvergenzuntersuchungen werden im III. Teile folgen.

*) Der linke Index bezieht sich auf die Iteration gemäß (3.) der Einleitung und $\lambda = i_{i+1}$.

**) S. 69—71.

Wir wenden uns jetzt zum Algorithmus (3.) d. h. zur Matrix (1.) der Einleitung und untersuchen den Fall, wo die a_ν *Potenzreihen* sind. Der besseren Übersicht wegen betrachten wir zunächst den Fall gewöhnlicher Potenzreihen einer Variabeln.

Es sei also in einer Umgebung von $z = 0$

$$a_\nu \equiv a_\nu(z) = \omega_0 + \alpha_{\nu 1} z + \alpha_{\nu 2} z^2 + \cdots . \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

Wir setzen also voraus, daß

(1.) $$a_1(0) = a_2(0) = \cdots = a_n(0) = \omega_0 .$$

Des weiteren sei noch

(2.) $$\omega_0 \neq 0 .$$

Die erste dieser Einschränkungen werden wir später fortlassen.

Unser Algorithmus ergibt für ${}^{(1)}a_\nu(z)$, folglich auch für ${}^{(i)}a_\nu(z)$ gewöhnliche Potenzreihen, als deren Anfangsglied ω_0 gewählt werden kann. Durch diese Wahl wollen wir unseren Algorithmus zu einem *eindeutigen* machen.

Bezeichnen wir in ${}^{(i)}a_\nu(z)$ den Koeffizienten von z^k mit $\alpha_{\nu k}^{(i)}$, so haben wir folgenden

Satz II. *Ist*

$$a_\nu(z) = \omega_0 + \alpha_{\nu 1} z + \alpha_{\nu 2} z^2 + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

und $\omega_0 \neq 0$, *so werden in den Potenzreihen*

$${}^{(i)}a_\nu(z), {}^{(i+1)}a_\nu(z), \ldots$$

die ersten $i + 1$ *entsprechenden Koeffizienten, unabhängig von* ν, *einander gleich und zwar wird*

$$(3.)\quad {}^{(i)}a_\nu(z) = \omega_0 + \frac{1}{n}(\alpha_{11} + \alpha_{21} + \cdots + \alpha_{n1}) z + \frac{1}{n}(\alpha_{12}^{(1)} + \alpha_{22}^{(1)} + \cdots + \alpha_{n2}^{(1)}) z^2 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n}(\alpha_{1i}^{(i-1)} + \alpha_{2i}^{(i-1)} + \cdots + \alpha_{ni}^{(i-1)}) z^i + \alpha_{\nu, i+1}^{(i)} z^{i+1} + \cdots .$$

D. h. es ist:

$$(4.)\qquad \alpha_{\nu k}^{(i)} = \frac{1}{n}(\alpha_{1k}^{(i-1)} + \alpha_{2k}^{(i-1)} + \cdots + \alpha_{nk}^{(i-1)}),$$

wenn nur $i \geqq k$. *Formell besteht also die Gleichung*

$$(5.)\qquad \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_1(z) = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_2(z) = \cdots = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_n(z) = \mu(z), \text{ wo}$$

$$(6.)\quad \mu(z) = \omega_0 + \frac{1}{n}(\alpha_{11} + \alpha_{21} + \cdots + \alpha_{n1}) z + \frac{1}{n}(\alpha_{12}^{(1)} + \alpha_{22}^{(1)} + \cdots + \alpha_{n2}^{(1)}) z^2 + \cdots .$$

2. Der Beweis wird durch vollständige Induktion geliefert. Nach unserem Algorithmus ist

$$(n)_\nu\, {}^{(1)}a_\nu^\nu(z) = (n)_\nu\, \omega_0^\nu + (n-1)_{\nu-1}\, \omega_0^{\nu-1}(\alpha_{11} + \alpha_{21} + \cdots \alpha_{n1})\, z + \cdots,$$ d. h.

$$^{(1)}a_\nu^\nu(z) = \omega_0^\nu + \frac{\nu}{n}\, \omega_0^{\nu-1}(\alpha_{11} + \alpha_{21} + \cdots + \alpha_{n1})\, z + \cdots.$$

Andererseits ist

$$^{(1)}a_\nu^\nu(z) = \omega_0^\nu + \nu\omega_0^{\nu-1}\, \alpha_{\nu 1}^{(1)}\, z + \cdots.$$

Mit Rücksicht auf (2.) haben wir daher, daß in der Tat, unabhängig von ν,

$$\alpha_{\nu 1}^{(1)} = \frac{1}{n}(\alpha_{11} + \alpha_{21} + \cdots + \alpha_{n1}).$$

Mithin sind in den $^{(1)}a_\nu(z)$ die zwei ersten entsprechenden Koeffizienten dieselben. Wir setzen nun voraus, daß in den $^{(i)}a_\nu(z)$ schon die $i+1$ ersten entsprechenden Koeffizienten einander gleich sind und zwar, laut Satz II, arithmetische Mittel, also:

$$^{(i)}a_\nu(z) = A(z) + \alpha_{\nu, i+1}^{(i)} z^{i+1} + \cdots,$$

wo, unabhängig von ν,

$$A(z) = \omega_0 + \frac{1}{n}(\alpha_{11} + \alpha_{21} + \cdots + \alpha_{n1})\, z + \cdots + \frac{1}{n}(\alpha_{1i}^{(i-1)} + \alpha_{2i}^{(i-1)} + \cdots + \alpha_{ni}^{(i-1)})\, z^i.$$

Dann hat man, wie zuvor, nur daß $A(z)$ für ω_0 und i für $i=0$ zu setzen ist,

$$(n)_\nu\, {}^{(i+1)}a_\nu^\nu(z) = (n)_\nu\, A^\nu(z) + (n-1)_{\nu-1}\, A^{\nu-1}(z)\,(\alpha_{1,i+1}^{(i)} + \alpha_{2,i+1}^{(i)} + \cdots + \alpha_{n,i+1}^{(i)})\, z^{i+1} + \cdots,$$

d. h.

$$^{(i+1)}a_\nu^\nu(z) = A^\nu(z) + \frac{\nu}{n} A^{\nu-1}(z)(\alpha_{1,i+1}^{(i)} + \alpha_{2,i+1}^{(i)} + \cdots + \alpha_{n,i+1}^{(i)})\, z^{i+1} + \cdots.$$

Da $A(z)$ nicht identisch verschwindet (z. B. ist $A(0) = \omega_0 \neq 0$), erhält man

$$^{(i+1)}a_\nu(z) = A(z) + \frac{1}{n}(\alpha_{1,i+1}^{(i)} + \alpha_{2,i+1}^{(i)} + \cdots + \alpha_{n,i+1}^{(i)})\, z^{i+1} + \cdots,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Wir schreiben $\mu(z)$ noch in einer anderen Form hin, indem wir in üblicher Weise

$$\left(\frac{d^k\, {}^{(i)}a_\nu(z)}{dz^k}\right)_{z=0} = \frac{d^k\, {}^{(i)}a_\nu(0)}{dz^k}$$

setzen und dadurch

$$(7.) \qquad \mu(z) = a_q(0) + \frac{d\, {}^{(1)}a_r(0)}{dz}\, z + \frac{1}{2!}\frac{d^2\, {}^{(2)}a_s(0)}{dz^2}\, z^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3\, {}^{(3)}a_t(0)}{dz^3}\, z^3 + \cdots$$

erhalten, wo $q, r, s, t, \ldots$ unabhängig von einander die Werte $1, 2, \ldots n$ haben.

3. Der Satz II kann unmittelbar übertragen werden auf den Fall, daß die Anfangsglieder der $a_\nu(z)$ dieselben positiven oder negativen ganz-

zahligen Potenzen von z enthalten, vorausgesetzt nur, daß die Anfangskoeffizienten bei allen $a_\nu(z)$ denselben, von Null verschiedenen Wert haben.

In diesem Falle gibt es nämlich eine positive oder negative ganze Zahl k derart, daß die $a_\nu(z)z^k$ Potenzreihen von der vorhin betrachteten Art sind. Infolge der Homogeneität des Algorithmus lassen sich die für $a_\nu(z)z^k$ geltenden Resultate auch auf die $a_\nu(z)$ selbst anwenden.

Sind in den $a_\nu(z)$ die Anfangskoeffizienten zwar von Null verschieden, aber nicht einander gleich, so besteht der Satz II noch mit der entsprechenden Modifikation.

Es sei z. B. $\omega_\nu \neq 0$ und

$$a_\nu(z) = \omega_\nu + \alpha_{\nu 1} z + \alpha_{\nu 2} z^2 + \cdots. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

Nehmen wir jetzt die Matrix (1.) der Einleitung, gebildet mit den Anfangselementen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$. Wir haben zufolge der Mehrdeutigkeit des Algorithmus im allgemeinen mehrere solche Matrizen, eine von ihnen sei

$$\begin{array}{cccc} \omega_1, & \omega_2, \ldots & \omega_n \\ {}^{(1)}\omega_1, & {}^{(1)}\omega_2, \ldots & {}^{(1)}\omega_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ {}^{(i)}\omega_1, & {}^{(i)}\omega_2, \ldots & {}^{(i)}\omega_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Dann wird es unter den für ${}^{(i)}a_\nu(z)$ sich ergebenden Potenzreihen eine solche geben, deren absolutes Glied ${}^{(i)}\omega_\nu$ ist, d. h.

$${}^{(i)}a_\nu(z) = {}^{(i)}\omega_\nu + \cdots.$$

Ist aber i hinreichend groß, so werden die Anfangskoeffizienten von

$${}^{(i)}a_\nu(z), \; {}^{(i+1)}a_\nu(z), \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

in beliebige Nähe des unter (4.) der Einleitung angegebenen Grenzwertes

$$\lim_{i=\infty} {}^{(i)}\omega_1 = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}\omega_2 = \cdots = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}\omega_n = M(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$$

rücken.

Ist also einerseits das Anfangssystem $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, andrerseits das System ${}^{(i)}\omega_1, {}^{(i)}\omega_2, \ldots {}^{(i)}\omega_n$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ so gewählt, daß

$$M(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) \neq 0,$$

so besteht der Satz II *in limite* mit leicht ausführbarer Modifikation.

4. Wir betrachten jetzt den Fall, in welchem die a_ν Potenzreihen der Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_p$ sind.

Es seien in einer gewissen Umgebung von $z_1 = z_2 = \cdots = z_p = 0$ die Potenzreihen

$$a_\nu(z_1, z_2, \ldots z_p) = \sum \alpha^{(\nu)}_{r_1 r_2 \ldots r_p} z_1^{r_1} z_2^{r_2} \cdots z_p^{r_p} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

konvergent. Wir ordnen diese Potenzreihen nach steigenden Potenzen von einer Variabeln, z. B. von z_1. Sind die „absoluten" Glieder dieser Potenzreihen (die selbst Potenzreihen der Variabeln $z_2, \ldots z_p$ sind) einander gleich*), so läßt sich der Satz II unmittelbar anwenden. Wir finden, daß von ν unabhängig

$$\left(\frac{\partial^{(1)} a_\nu}{\partial z_1}\right)_{z_1=0} = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial a_1}{\partial z_1} + \frac{\partial a_2}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial z_1}\right)_{z_1=0} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

ist. Entsprechend dieser Relation erhalten wir die „Koeffizienten" von z_1^2 in ${}^{(2)}a_\nu$ aus den betreffenden „Koeffizienten" von ${}^{(1)}a_\nu$, und so weiter. Es entsteht nach Multiplikation mit $k!$, *das Analogon von* (4.), *nämlich*:

$$(8.)\quad \left(\frac{\partial^{k\,(i)} a_\nu}{\partial z_\pi^k}\right)_{z_\pi=0} = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial^{k\,(i-1)} a_1}{\partial z_\pi^k} + \cdots + \frac{\partial^{k\,(i-1)} a_n}{\partial z_\pi^k}\right)_{z_\pi=0} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n;\ \pi = 1, 2, \ldots p)$$

wenn nur $i \geqq k$ *und*

$$(9.)\quad \begin{gathered} a_1(z_1, z_2, \ldots z_p)_{z_\pi=0} = a_2(z_1, z_2, \ldots z_p)_{z_\pi=0} = \cdots = a_n(z_1, z_2, \ldots z_p)_{z_\pi=0}, \qquad (\pi = 1, 2, \ldots p) \\ a_1(0, 0, \ldots 0) = a_2(0, 0, \ldots 0) = \cdots = a_n(0, 0, \ldots 0) \neq 0 \end{gathered}$$

ist. Es existiert auch hier eine Grenzpotenzreihe $M(z_1, z_2, \ldots z_p)$, *welche eine ähnliche Konstruktion wie* (6.) *hat.*

5. Wir kehren der Einfachheit halber zu dem in 1. und 2. behandelten Falle zurück, in welchem die a_ν gewöhnliche Potenzreihen einer Variabeln sind. Wir wollen uns mit den *Inversen* dieser Potenzreihen befassen. Es stellt sich heraus, daß ein dem Satz II analoger Satz gilt; die Annäherung an die Grenze für lim $i = \infty$ geschieht auch hier durch arithmetische Mittel.

Es gilt der folgende

Satz III. *Ist*

$$a_\nu(z) = \omega_0 + \alpha_{\nu 1} z + \alpha_{\nu 2} z^2 + \cdots, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

mit $\omega_0 \neq 0$ *und*

$$(10.)\quad \alpha_{11} + \alpha_{21} + \cdots + \alpha_{n1} = \alpha \neq 0,$$

so werden in den Umkehrungen der Potenzreihen ${}^{(i)}a_\nu(z)\,(i = 1, 2, 3, \ldots)$ *die*

*) d. h. identisch.

ersten i entsprechenden Koeffizienten, unabhängig von ν, untereinander gleich und zwar, wenn wir

$$z = \frac{\beta_{\nu 1}^{(i)}}{\alpha^{\varrho_1}} ({}^{(i)}a_\nu - \omega_0) + \frac{\beta_{\nu 2}^{(i)}}{\alpha^{\varrho_2}} ({}^{(i)}a_\nu - \omega_0)^2 + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

setzen, so wird

$$(11.) \quad z = \frac{n}{\alpha} ({}^{(i)}a_\nu - \omega_0) + \frac{1}{n} \cdot \frac{\beta_{12}^{(1)} + \beta_{22}^{(1)} + \cdots + \beta_{n2}^{(1)}}{\alpha^3} ({}^{(i)}a_\nu - \omega_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n} \cdot \frac{\beta_{1i}^{(i-1)} + \beta_{2i}^{(i-1)} + \cdots + \beta_{ni}^{(i-1)}}{\alpha^{\varrho_i}} ({}^{(i)}a_\nu - \omega_0)^i + \frac{\beta_{\nu, i+1}^{(i)}}{\alpha^{\varrho_{i+1}}} ({}^{(i)}a_\nu - \omega_0)^{i+1} + \cdots,$$

wo $\varrho_i = 2^i - 1$. *D. h. es ist*

$$(12.) \qquad \beta_{\nu k}^{(i)} = \frac{1}{n} (\beta_{1k}^{(i-1)} + \beta_{2k}^{(i-1)} + \cdots + \beta_{nk}^{(i-1)})$$

wenn nur $i \geqq k$*).

6. Der Beweis beruht auf der folgenden Bemerkung: Ist

$$y = f(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \cdots$$

in einer Umgebung von $z = 0$ konvergent, so ist, wie bekannt,

$$z = \frac{1}{\lambda_1} (y - \lambda_0) + \cdots$$

konvergent in einer Umgebung von $y = \lambda_0$, wenn nur $\lambda_1 \neq 0$.

Die Koeffizienten dieser Umkehrfunktion ergeben sich durch sukzessive Differenziation von

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{f'(z)},$$

wenn man daselbst $y = \lambda_0$, $z = 0$ setzt.

Beachtet man, daß

$$\frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{f''(z)}{f'(z)^2} \cdot \frac{1}{f'(z)}, \quad \frac{d^mz}{dy^m} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d^{m-1}z}{dy^{m-1}}\right) \frac{1}{f'(z)},$$

so hat man durch vollständige Induktion, daß

$$(13.) \quad \text{Koeff. } (y - \lambda_0)^m = \frac{1}{\lambda_1^{\varrho_m}} (R_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m-1}) + \lambda_m R_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m-1})),$$

wo R_1, R_2 Polynome ihrer Argumente sind und

$$\varrho_m = 2\varrho_{m-1} + 1, \quad \varrho_1 = 1. \qquad (m = 2, 3, \ldots)$$

Die independente Darstellung von ϱ_i ergibt sich aus

$$\sum_{m=2}^{i} 2^{i-m} \varrho_m$$

als

$$\varrho_i = 2^i - 1.$$

*) Die Gleichung (12.) bleibt richtig, wenn wir, etwas weniger ausführlich, Koeff. $({}^{(i)}a_\nu - \omega_0)^k = \beta_{\nu k}^{(i)}$ schreiben.

Laut Satz II sind in den Reihen ${}^{(i)}a_\nu(z)$, ${}^{(i+1)}a_\nu(z)$, ... die ersten $i+1$ entsprechenden Koeffizienten einander gleich. Ist andererseits $i>0$, so ist der Koeffizient von z^1

$$\frac{1}{n}(\alpha_{11}+\alpha_{21}+\cdots+\alpha_{n1})=\frac{\alpha}{n}.$$

Daher ist ${}^{(i)}a_\nu(z)$ für $i>0$ umkehrbar, sobald nur $\alpha \neq 0$, und zwar sind mit Rücksicht auf (13.) in den Reihen

$$z=\frac{n}{\alpha}({}^{(i)}a_\nu-\omega_0)+\cdots \qquad (\nu=1,2,\ldots n)$$

die ersten i entsprechenden Koeffizienten einander gleich.

Die Inversen von ${}^{(1)}a_\nu(z)$ und ${}^{(2)}a_\nu(z)$ sind, da

$${}^{(1)}a_\nu(z)=\omega_0+\frac{\alpha}{n}z+\alpha_{\nu 2}^{(1)}z^2+\cdots,$$

$${}^{(2)}a_\nu(z)=\omega_0+\frac{\alpha}{n}z+\frac{1}{n}(\alpha_{12}^{(1)}+\alpha_{22}^{(1)}+\cdots+\alpha_{n2}^{(1)})z^2+\cdots,$$

von folgender Form:

$$z=\frac{n}{\alpha}({}^{(1)}a_\nu-\omega_0)-\frac{n^3\alpha_{\nu 2}^{(1)}}{\alpha^3}({}^{(1)}a_\nu-\omega_0)^2+\cdots,$$

$$z=\frac{n}{\alpha}({}^{(2)}a_\nu-\omega_0)-\frac{n^2}{\alpha^3}(\alpha_{12}^{(1)}+\alpha_{22}^{(1)}+\cdots+\alpha_{n2}^{(1)})({}^{(2)}a_\nu-\omega_0)^2+\cdots.$$

Der Koeffizient von $({}^{(2)}a_\nu-\omega_0)^2$ ist also das arithmetische Mittel der Koeffizienten von $({}^{(1)}a_1-\omega_0)^2$, $({}^{(1)}a_2-\omega_0)^2$, ... $({}^{(1)}a_n-\omega_0)^2$.

Man zeigt mit vollständiger Induktion auf Grund von (4.) und (13.), daß das gleiche auch allgemein gilt.

7. Bevor wir zu den Konvergenzuntersuchungen übergehen, sei es erlaubt einige Bemerkungen bezüglich der Potenzreihen mehrerer Veränderlicher in 4. zu machen.

Ist $n=2$, so hat man*)

$$a_1=M(a_1,a_2)\varphi_1(z_1),$$
$$a_2=M(a_1,a_2)\varphi_2(z_1),$$

wenn nur

$$(14.)\qquad a_1\neq 0,\quad a_2\neq 0,\quad a_1+a_2\neq 0,\quad a_1-a_2\neq 0.$$

Also steht statt einer der $p=2$ Variabeln z. B. statt z_2 einer der Werte von $M(a_1,a_2)$, und zwar hängen a_1,a_2 von dieser Variabeln linear homogen ab.

---

*) Vgl. *v. Dávid*, Theorie des *Gauß*schen verallg. u. speziell. arithmet.-geometr. Mittels. Math. u. Naturwissensch. Berichte aus Ungarn, XXV (1907), S. 153 ff.

Die Potenzreihen $\varphi_1(z_1)$ und $\varphi_2(z_1)$ aber sind nichts anderes als die Quadrate der *Jacobi*schen Funktionen

$$\vartheta_{00}(\omega) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots,$$
$$\vartheta_{01}(\omega) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots,$$

wo

$$\omega = z_1, \quad q = e^{\pi\sqrt{-1}\,\omega}, \quad |q| < 1.$$

Es ist eine Frage von eminenter Wichtigkeit, ob es für ein beliebiges n eine analoge Darstellung gibt, mit anderen Worten, ob sich die $a_1, a_2, \ldots a_n$, wenn sie den den Ungleichungen (14.) entsprechenden Bedingungen*) genügen, in der Form

$$a_\nu = M(a_1, a_2, \ldots a_n)\varphi_\nu(z_1, z_2, \ldots z_{n-1}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

darstellen lassen.

Andererseits führt die Transformation zweiter Ordnung der $\vartheta_{00}(\omega)$, $\vartheta_{01}(\omega)$ zu den Zahlen ${}^{(1)}a_1, {}^{(1)}a_2$, d. h. zu

$${}^{(1)}a_1 = M(a_1, a_2)\,\vartheta_{00}^2(2\omega),$$
$${}^{(1)}a_2 = M(a_1, a_2)\,\vartheta_{01}^2(2\omega).$$

Könnten wir das Analogon dieser Transformation finden, so könnten wir, in Hinblick auf die Identität (2.) der Einleitung, Wurzeln und „Koeffizienten" einer algebraischen Gleichung *uniformisiert* darstellen, und in diesen Darstellungen wäre eine der uniformisierenden Variabeln eben $z_n = M(a_1, a_2, \ldots a_n)$. Durch diese Darstellung wäre der Unterschied des Überganges von den Wurzeln zu den Koeffizienten, und von den Koeffizienten zu den Wurzeln derselbe wie der Unterschied der Anwendung einer Transformation und ihrer Inversen.

III. Konvergenzuntersuchungen.

1. Wir gehen endlich an die Untersuchung der Konvergenz der Reihen von II. Wir beschränken uns auf den Fall, wo $a_\nu \equiv a_\nu(z)$ gewöhnliche Potenzreihen einer Variabeln sind.

Es ist

$${}^{(i)}a_\nu(z) = \lim_{k=\infty}(\alpha_{\nu 0}^{(i)} + \alpha_{\nu 1}^{(i)} z + \cdots + \alpha_{\nu k}^{(i)} z^k). \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n;\ i = 0, 1, 2, \ldots)$$

Laut Satz II ist $\alpha_{\nu k}^{(i)}$ von ν unabhängig, wenn nur $i \geqq k$. Setzen wir also

$$\alpha_{\nu k}^{(k)} = \alpha_{\nu k}^{(k+1)} = \cdots = \alpha_k, \quad \alpha_{\nu 0}^{(0)} = \omega_0,$$

so wird

*) Vgl. Teil III, 5.

$$\mu(z) = \lim_{k=\infty} (\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_k z^k).$$

Es sei $\varrho_i (\varrho_0 = \varrho)$ der kleinste der Konvergenzradien der Reihen

$$^{(i)}a_1(z),\ ^{(i)}a_2(z), \ldots\ ^{(i)}a_n(z),$$

wie sie in II. 1. *eindeutig* festgelegt wurden.

Da

$$^{(i+1)}a_\nu(z) = \sqrt[\nu]{\frac{1}{(n)_\nu} \Sigma\, ^{(i)}a_{r_1}(z)\, ^{(i)}a_{r_2}(z) \cdots\ ^{(i)}a_{r_\nu}(z)},$$

so werden die $^{(i+1)}a_\nu(z)$ auf dem Kreise

(1.) $$|z| < \min(\varrho_i, |\sigma_i|)$$

konvergieren, wo σ_i die absolut kleinste Wurzel der Potenzreihen

$$\Sigma\, ^{(i)}a_{r_1}(z)\, ^{(i)}a_{r_2}(z) \cdots\ ^{(i)}a_{r_\nu}(z) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

ist. Wir haben, infolge von

$$^{(i+1)}a_\nu(0) = \omega_0 \neq 0,$$

(2.) $$|\sigma_i| > 0.$$

Es fragt sich jetzt, für welche Werte von z konvergiert $\mu(z)$ und gibt einen Wert, der durch unseren Algorithmus, ausgehend von $a_1(z)$, $a_2(z), \ldots a_n(z)$ angenähert wird, d. h. für den

$$\mu(z) = M(a_1(z), a_2(z), \ldots a_n(z))?$$

Diese Frage läuft auf die Unabhängigkeit eines doppelten Limes von der Reihenfolge der einzelnen Grenzübergänge hinaus: wann wird, so fragen wir,

(3.) $$\lim_{i=\infty} \lim_{k=\infty} (\alpha_{\nu 0}^{(i)} + \alpha_{\nu 1}^{(i)} z + \cdots + \alpha_{\nu k}^{(i)} z^k) = \lim_{k=\infty} \lim_{i=\infty} (\alpha_{\nu 0}^{(i)} + \alpha_{\nu 1}^{(i)} z + \cdots + \alpha_{\nu k}^{(i)} z^k)$$

sein*)?

2. Im Falle $n = 2$ (d. h. für das *Gauß*sche arithmetisch-geometrische Mittel) können wir für $\mu(z)$ in einfacher Weise einen Konvergenzbereich angeben. Zu diesem Zwecke beweisen wir folgendes *Hilfstheorem:*

„Sind a_1, a_2 zwei Zahlen, für welche

(4.) $$a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_1 + a_2 \neq 0, \quad a_1 - a_2 \neq 0,$$

dann ist bei beliebigem i wieder

(5.) $$^{(i)}a_1 \neq 0, \quad ^{(i)}a_2 \neq 0, \quad ^{(i)}a_1 + {}^{(i)}a_2 \neq 0, \quad ^{(i)}a_1 - {}^{(i)}a_2 \neq 0.$$“

---

*) Hierzu genügt es natürlich nicht, wenn wir z. B. nachweisen, daß $\varrho_i \geqq \tau > 0$ ist für ein festes τ, wenn nur $i > I$. Herr *J. Pál* hatte die Freundlichkeit mir entsprechende Gegenbeispiele mitzuteilen. Zu diesen Gegenbeispielen gelangt man durch Algorithmen, bei welchen eine der Ungleichung (7.) entsprechende Eigenschaft nicht existiert.

In der Tat, da

$$2\,{}^{(1)}a_1 = a_1 + a_2, \quad {}^{(1)}a_2^2 = a_1 a_2,$$

so hat man infolge (4.):

$${}^{(1)}a_1 \neq 0, \quad {}^{(1)}a_2 \neq 0.$$

Da weiter

$${}^{(1)}a_1 \pm {}^{(1)}a_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2})^2,$$

so hat man laut (4.)

$${}^{(1)}a_1 + {}^{(1)}a_2 \neq 0, \quad {}^{(1)}a_1 - {}^{(1)}a_2 \neq 0.$$

Man folgert in derselben Weise die Ungleichungen (5.) für $i=2,3,\cdots$.

Auf Grund des bewiesenen Hilfssatzes haben wir:

Satz IV. *Sind*

$$a_1(z), \quad a_2(z), \quad a_1(z)+a_2(z), \quad a_1(z)-a_2(z)$$

für

$$0 < |z| < \zeta$$

von Null verschieden, so ist $\mu(z)$ *auf dem Kreise*

(6.) $$|z| < \min(\varrho, \zeta)$$

konvergent und

$$\mu(z) = M(a_1(z), a_2(z)).$$

In der Tat erfüllen $a_1(z), a_2(z)$ in jedem Punkte des letzgenannten Kreises (mit Ausnahme von $z=0$) die Bedingungen (4.); daselbst werden also ${}^{(1)}a_1(z), {}^{(1)}a_2(z)$ nicht nur konvergieren, sondern sie erfüllen ihrerseits ebenfalls die Bedingungen (5.); usw.

Wir haben noch nachzuweisen, daß die formell gebildete Reihe selbst

$$\mu(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_k z^k + \cdots$$

konvergiert und den Grenzwert des auf $a_1(z), a_2(z)$ angewandten Algorithmus, d. h. einen Wert von $M(a_1(z), a_2(z))$, darstellt.

Es sei $M^{(i)}$ der größte Wert von $|{}^{(i)}a_1(z)|$, $|{}^{(i)}a_2(z)|$ auf der Peripherie des Kreises

$$|z| = r, \quad 0 < r < \min(\varrho, \zeta).$$

Nach der *Cauchy*schen Abschätzung der Koeffizienten ist

$$|\alpha_{\nu k}^{(i)}| \leqq M^{(i)} r^{-k}.$$

Die in I. 2. angewandte Ungleichung

$$\mathrm{Max}\,|{}^{(i+1)}a_\nu| \leqq \mathrm{Max}\,|{}^{(i)}a_\nu| \qquad (\nu=1,2,\ldots n)$$

gibt

(7.) $$M^{(i+1)} \leqq M^{(i)} \leqq M^{(0)}.$$

Es ist also

(8.) $$|\alpha_{\nu k}^{(i)}| \leqq M^{(0)} r^{-k},$$

oder, da $\alpha_{\nu k}^{(i)} = \alpha_k$, wenn nur $i \geqq k$,

(9.) $$|\alpha_k| \leqq M^{(0)} r^{-k}.$$

Mithin konvergiert

$$\mu(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_k z^k + \cdots$$

auf dem Kreise $|z| \leqq r$, und da

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{\nu k}^{(i)} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k \right| \leqq 2 M^{(0)} \sum_{k=i+1}^{\infty} \left| \frac{z}{r} \right|^k$$

(wo i beliebig ist), so führt der Algorithmus zu dem Werte von $\mu(z)$, d. h. es besteht die Gleichung (3.).

3. Als Beispiel für die Anwendung von Satz IV erwähne ich, daß *Gauß**) für den Fall

$$a_1(z) = 1 + z, \quad a_2(z) = 1 - z$$

die Grenzpotenzreihe $1/\mu(z)$ angegeben hat. Ihre Konvergenz wurde dann durch Herrn *v. Mangoldt***) nachgewiesen.

Unser Satz liefert mit einem Schlage, daß, da

$$\varrho = \infty, \quad \zeta = 1$$

ist, $\mu(z)$ auf dem Kreise $|z| < 1$ konvergiert, und da $\mu(z)$ daselbst von Null verschieden ist, konvergiert ebendaselbst auch $1/\mu(z)$.

4. Die folgende Bemerkung ist vielleicht nicht ohne Interesse. Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ lassen sich auch rückwärts iterieren, d. h. man kann Zahlen

$$^{(-1)}a_1, \; ^{(-1)}a_2, \ldots \; ^{(-1)}a_n$$

angeben, für welche

$$a_\nu^\nu = \frac{1}{(n)_\nu} \Sigma \, ^{(-1)}a_{r_1} \, ^{(-1)}a_{r_2} \cdots \, ^{(-1)}a_{r_\nu}. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

Diese sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^n - (n)_1 a_1 x^{n-1} + (n)_2 a_2^2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n^n = 0.$$

Durch Weiterführung erhält man allgemein

$$^{(-i)}a_1, \; ^{(-i)}a_2, \ldots \; ^{(-i)}a_n. \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

Bei jedem Schritt bekommt man $n!$ Systeme $^{(-i)}a_1, \; ^{(-i)}a_2, \ldots \; ^{(-i)}a_n$, nämlich die Wurzel-Systeme der Gleichungen

---

*) Werke, III, S. 366 ff.

**) Zeitschr. f. Math. u. Phys., 20, (1875), S. 302—309.

$$x^n - (n)_1{}^{(-i+1)}a_{r_1}x^{n-1} + (n)_2{}^{(-i+1)}a_{r_2}^2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n{}^{(-i+1)}a_{r_n}^n = 0,$$

wo $r_1, r_2, \ldots r_n$ eine Permutation von $1, 2, \ldots n$ ist.

Es gelten die Behauptungen, daß die folgenden Relationen (10.) und (11.), jede für sich allein, mit (4.), also mit (5.), *äquivalent* sind:

(10.) $${}^{(1)}a_2 \neq 0, \quad {}^{(2)}a_2 \neq 0, \quad {}^{(3)}a_2 \neq 0;$$

(11.) $${}^{(-1)}a_1 \neq {}^{(-1)}a_2, \quad {}^{(-2)}a_1 \neq {}^{(-2)}a_2, \quad {}^{(-3)}a_1 \neq {}^{(-3)}a_2.$$

Infolge dieser Äquivalenzen kann man dem Satze IV *zwei weitere Formen geben.*

5. Die Begründung des Satzes IV auf Grund unseres Hilfssatzes läßt leicht erkennen, daß der springende Punkt im Beweise die folgende Tatsache ist: die Nullstellen der ${}^{(i)}a_\nu(z)$ häufen sich nicht gegen den Nullpunkt hin. Diese ist an die *unendlich* vielen Bedingungen

$${}^{(i)}a_\nu(z) \neq 0 \qquad (i=0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.})$$

für $|z| < \zeta$ gebunden.

Diese unendlich vielen Bedingungen wurden oben für den Fall $n = 2$ durch eine *endliche* Anzahl von Bedingungen ersetzt, und zwar durch folgende:

$$a_1(z) \neq 0, \quad a_2(z) \neq 0, \quad a_1(z) + a_2(z) \neq 0, \quad a_1(z) - a_2(z) \neq 0,$$

wenn nur

$$0 < |z| < \zeta$$

ist.

Da auch für den Fall $n > 2$ die den Ungleichungen (7.), (8.) und (9.) entsprechenden Ungleichungen gelten, so können wir den allgemeinen Fall, $n \geq 2$, in ganz analoger Weise, wie folgt, behandeln.

Erstens nehmen wir eine einfache Reduktion vor. Mit Rücksicht nämlich auf

$${}^{(i)}a_n^n = {}^{(i-1)}a_1\,{}^{(i-1)}a_2 \ldots {}^{(i-1)}a_n$$

folgt, wofern noch $a_1, a_2, \ldots a_n$ von Null verschieden sind, daß, wenn in der Matrix

$$\begin{array}{l} a_1, \quad a_2, \ldots \quad a_n \\ {}^{(1)}a_1, \; {}^{(1)}a_2, \ldots \; {}^{(1)}a_n \\ \cdots\cdots \\ {}^{(i)}a_1, \; {}^{(i)}a_2, \ldots \; {}^{(i)}a_n \\ \cdots\cdots \end{array}$$

das erste verschwindende Glied in der i-ten Zeile vorkommt, dieses *nicht* ${}^{(i)}a_n$ sein kann. Weiterhin werden

$$^{(i+1)}a_n = {}^{(i+2)}a_n = \cdots = 0.$$

Für unsere Zwecke genügt es daher, für die Anfangselemente $a_1, a_2, \ldots a_n$ eine endliche Anzahl von Bedingungen festzustellen, durch welche

$$^{(i)}a_n \neq 0. \qquad (i=0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.})$$

Jetzt wollen wir in $a_1, a_2, \ldots a_n$ *rationale* Bedingungen für das Nichtverschwinden der $^{(i)}a_n$ geben. Zunächst erhalten wir hierfür *algebraische* Bedingungen.

In der Gleichung

$$^{(i)}a_n^n = {}^{(i-1)}a_1\, {}^{(i-1)}a_2 \ldots {}^{(i-1)}a_n$$

können $^{(i-1)}a_\nu$ durch $^{(i-2)}a_1, {}^{(i-2)}a_2, \ldots {}^{(i-2)}a_n$ ausgedrückt werden usw., wodurch wir zu einer algebraischen Darstellung von $^{(i)}a_n$ in $a_1, a_2, \ldots a_n$ gelangen.

Schafft man die Wurzelzeichen aus dieser Darstellung fort, so gelangt man zu der Gleichung niedrigsten Grades*), der sämtliche $^{(i)}a_n$ (bei fixem i) genügen,

$$C_{s_i}^{(i)} x^{s_i} + \cdots + C_1^{(i)} x + C^{(i)} = 0, \tag{12.}$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung sind symmetrische, rationale ganze Funktionen von $a_1, a_2, \ldots a_n$, mit ganzzahligen Koeffizienten.

Damit nun $^{(i)}a_n \neq 0$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß

$$C^{(i)} \neq 0 \quad (C^{(0)} = a_n) \qquad (i=0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.})$$

ist. Dies sind die gemeinten rationalen Bedingungen.

Existiert eine endliche Anzahl von Bedingungen der erwähnten Art, so existiert ein $k = k(n)$, für das aus dem Nichtverschwinden von

$$C^{(0)}, C^{(1)}, \ldots C^{(k)} \tag{13.}$$

das Nichtverschwinden der weiteren $C^{(i)}$ $(i = k+1,\ k+2, \ldots)$ folgt, und man hat den dem Satze IV analogen

Satz V. *Sind*

$$C^{(0)}, C^{(1)}, \ldots C^{(k)}$$

für

$$0 < |z| < \zeta$$

von Null verschieden, so ist $\mu(z)$ *auf dem Kreise*

$$|z| < \min(\varrho, \zeta) \tag{14.}$$

konvergent und

$$\mu(z) = M(a_1(z), a_2(z), \ldots a_n(z)).$$

---

*) Siehe *Abel*, Oeuvres II. (1881), p. 217, § 2.

Im Falle $n = 2$ ist $k = 4$ und die zu (13.) gehörigen Gleichungen lauten (wenn a_ν statt $a_\nu(z)$ geschrieben wird)

$$(15.) \qquad \begin{aligned} &a_2 = 0, \quad a_1 a_2 = 0, \quad (a_1 + a_2)^2 a_1 a_2 = 0, \\ &(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)^2 a_1^2 a_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Die weiteren $C^{(i)}$ enthalten keine anderen wesentlichen Faktoren (vergl. (4.) und Satz IV) als

$$a_1, \quad a_2, \quad a_1 + a_2, \quad a_1 - a_2.$$

Die nähere Untersuchung der Gleichungen (12.) und der Gleichungen $C^{(i)} = 0$ muß ich mir für eine spätere Gelegenheit vorbehalten.

Einladung

zum

V. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Cambridge, 1912.

Das Organisationskomitee hat die Ehre zur Teilnahme an dem fünften internationalen Mathematiker-Kongresse einzuladen, der

in Cambridge vom 22. bis zum 28. August 1912

stattfinden soll. Wie bekannt, fanden die früheren Kongresse in Zürich (1897), Paris (1900), Heidelberg (1904) und Rom (1908) statt; bei dieser letzten Versammlung wurde Cambridge zum Sitze des nächsten Kongresses gewählt.

Unser Komitee hat den Kongreß unter die Leitung eines internationalen Komitees gestellt und wird sein möglichstes tun, damit der Kongreß der hervorragenden Gelehrten, die an ihm teilnehmen, würdig ausfalle und der Wissenschaft gute Dienste leiste.

Die von der vom Kongreß in Rom ernannten Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission veranlaßten Berichte und Mitteilungen werden in Empfang genommen werden und ohne Zweifel zu wichtigen Erörterungen führen.

Wir haben uns bemüht, eine Reihe von Vorträgen zu veranstalten, die eine Anschauung des gegenwärtigen Standes der mathematischen Wissenschaften und deren Anwendungen zu geben bestimmt sind. Zu unserer Freude können wir mitteilen, daß die Herren *E. Borel*, *E. W. Brown*, *A. Kneser*, *E. G. H. Landau*, *J. Larmor*, Sir *W. White*, diesen Absichten freundlich entgegenkommend, sich bereit erklärt haben, in den Vollsitzungen Vorträge über Themata zu halten, die später angekündigt werden sollen.

In einem weiteren Zirkular werden wir das genaue Programm des Kongresses und alles auf den Empfang der Teilnehmer Bezügliche zur Kenntnis bringen.

Wir beschränken uns heute darauf, die allgemeine Aufmerksamkeit auf den Kongreß, der im August 1912 gehalten werden soll, zu lenken.

Der Kongreß wird aus vier Sektionen bestehen:

I. Arithmetik, Algebra, Analysis.
II. Geometrie.
III. Mechanik, Mathematische Physik, Angewandte Mathematik.
IV. Philosophische, historische und didaktische Fragen.

Jeder, der die £1 betragende Einschreibegebühr bezahlt, darf am Kongreß teilnehmen und erhält den Band der Verhandlungen. Die Familienmitglieder der Teilnehmer am Kongresse haben die Einschreibegebühr von 12*s.* zu bezahlen, sind aber nicht zum Empfang des Bandes der Verhandlungen berechtigt.

Kassenwart des Kongresses ist

Prof. Sir *J. Larmor*, St. John's College, Cambridge (England).

Für alle auf den Kongreß bezüglichen Auskünfte wende man sich an den Generalsekretär des Organisationskomitees

Prof. *E. W. Hobson*, Christ's College, Cambridge (England).

Das Organisationskomitee:

G. H. Darwin, Präsident, *E. W. Hobson*, } Generalsekretäre,
J. Larmor, Kassenwart, *A. E. H. Love*, }
H. F. Baker, *A. Berry*.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft
für das Jahr 1913.

Eine gegebene Ellipse wird durch die Methode der reziproken Radien in ein gewisses Oval verwandelt. Und eine von diesem Oval umgrenzte homogene materielle ebene Fläche wird, unter Zugrundelegung der Theorie des logarithmischen Potentials, was ihre Einwirkung auf äußere Punkte anbelangt, ersetzbar sein durch eine von zwei Massenpunkten begrenzte materielle Linie.

Es dürfte nun wohl von Interesse sein, diesen von *C. Neumann* in den Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss. im Jahre 1909 aufgestellten Satz zu übertragen auf die Theorie des *Newton*schen Potentials. Die Gesellschaft stellt daher folgende Frage:

Wie lautet, in der Theorie des *Newton*schen Potentials, für das durch die Methode der reziproken Radien aus dem Ellipsoid entstehende Ovaloid derjenige Satz, der jenem *C. Neumann*schen Satze analog ist?

Die Gesellschaft wünscht, daß diese Frage, wenn auch nicht im allgemeinen, so doch für irgendeinen speziellen Fall beantwortet werden möchte, so z. B. für den Fall, daß das gegebene Ellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, und überdies das Zentrum der (nach der Methode der reziproken Radien auszuführenden) Transformation im Mittelpunkt des Ellipsoides liegt.

Einlieferung bis zum 31. Oktober 1913; Preis 1500 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wenn nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen einseitig geschrieben und paginiert, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Außenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angibt. Jede Bewerbungsschrift muß auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, daß sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Einsendungen sind an den derz. Sekretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigentum der Gesellschaft.

Inhaltsverzeichnis der Bände 131—140.

	Band	Seite
P. Appell in Paris.		
Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement . .	133.	93— 96
M. Bauer in Budapest.		
Über die arithmetische Reihe	131.	265—267
Zur allgemeinen Theorie der algebraischen Größen	132.	21— 32
Über Gleichungen ohne Affekt	132.	33— 35
Elementare Irreduzibilitätsuntersuchungen	134.	15— 22
F. Bernstein in Göttingen.		
Zur Theorie der trigonometrischen Reihe	132.	270—278
O. Biermann. †		
Eine formale Ableitung der *Laurent*schen Reihe einer Funktion aus einer ihrer rational gebrochenen Näherungsfunktionen	135.	142—145
P. Bohl in Riga.		
Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie	131.	268—321
Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem	135.	189—283
E. Busche in Hamburg.		
Über Gitterpunkte in der Ebene	131.	113—135
Zur Theorie der Funktion $[x]$	136.	39— 57
L. v. Dávid in Klausenburg.		
Zur Theorie der *Schapira*schen Iteration	135.	62— 74
Reihenentwicklungen und Konvergenzuntersuchungen betreffend die *Schapira*sche Iteration	140.	277—296
L. E. Dickson in Chicago.		
On the congruence $x^n + y^n + z^n \equiv 0 \pmod{p}$	135.	134—141
Lower limit for the number of sets of solutions of $x^e + y^e + z^e \equiv 0 \pmod{p}$	135.	181—188

	Band	Seite
W. Ermakoff in Kiew.		
Équations différentielles du premier ordre ayant des multiplicateurs de la forme $(y-u_1)^{a_1}(y-u_2)^{a_2}\dots(y-u_n)^{a_n}$	131.	56— 73
G. Faber in Stuttgart.		
Über die *Newton*sche Näherungsformel	138.	1— 21
J. Farkas in Klausenburg.		
Beiträge zu den Grundlagen der analytischen Mechanik	131.	165—201
L. Fejér in Budapest.		
Über Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel	131.	216—223
Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter *Fourier*reihe	137.	1— 5
*Lebesgue*sche Konstanten und divergente *Fourier*reihen	138.	22— 53
E. Fischer in Erlangen.		
Verallgemeinerung des *Sylvester*schen Determinantensatzes	135.	306—318
Über algebraische Modulsysteme und lineare homogene partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	140.	48— 81
A. Fraenkel in München.		
Die Berechnung des Osterfestes	138.	133—146
Ph. Frank in Wien.		
Über die Bahnkurven der Mechanik	134.	156—165
A. Friedmann in St. Petersburg.		
— und *J. Tamarkine* in St. Petersburg, Quelques formules concernant la théorie de la fonction $[x]$ et des nombres de *Bernoulli*	135.	146—156
G. Frobenius in Berlin.		
Über den *Fermat*schen Satz	137.	314—316
R Fueter in Basel.		
Die Theorie der Zahlstrahlen II	132.	255—269
Ph. Furtwängler in Bonn.		
Über die Klassenzahlen *Abel*scher Zahlkörper	134.	91— 94
Über die Klassenzahlen der Kreisteilungskörper	140.	29— 32
D. Gravé in Kiew.		
Démonstration d'un théorème de *Tchébychef* généralisé	140.	247—251

	Band	Seite
L. v. Grosschmid in Budapest.		
Über die explizite Darstellung aller rationalen Lösungen einer quadratischen binomischen Kongruenz mit Hilfe der Idealfaktoren des Modulus	139.	101—105
S. Gundelfinger. †		
Drei Briefe von *C. F. Gauß* an *Joh. von Müller*	131.	1— 7
Uber die Kennzeichen, welche die Lage eines Punktes in bezug auf ein Tetraeder unter Zugrundelegung allgemeiner projektiver Koordinaten entscheiden	136.	1— 16
Über ein algebraisches Theorem	140.	83— 88
A. Haar in Göttingen.		
— und *D. König* in Budapest, Über einfach geordnete Mengen	139.	16— 28
E. Haentzschel in Berlin.		
Über eine von *Hermite* herrührende Substitution zur Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die *Weierstraß*sche Normalform	135.	75— 80
J. N. Hazzidakis in Athen.		
Über die Kräfte, die Kegelschnitte als Bahnen hervorrufen	133.	68— 76
R. Heger in Dresden.		
Zur Geometrie auf der Kugel	132.	279—287
E. Hellinger in Marburg a. d. L.		
Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen	136.	210—271
K. Hensel in Marburg a. d. L.		
Über die zu einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper	136.	183—209
G. Hessenberg in Breslau.		
Kettentheorie und Wohlordnung	135.	81—133
Berichtigung hierzu	135.	318
G. Hettner in Berlin.		
Die Gleichung der *Schwarz*schen Minimalfläche in ihrem Zusammenhange mit den hyperelliptischen Thetafunktionen	138.	54— 76
E. Hilb in Würzburg.		
Über Reihenentwicklungen, welche aus speziellen Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichungen entspringen	140.	205—229

	Band	Seite
J. Horn in Darmstadt.		
Bewegungen in der Nähe einer Gleichgewichtslage	131.	224—245
Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen	133.	19— 67
Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzen- und Differentialgleichungen für große Werte der Veränderlichen	138.	159—191
*Volterra*sche Integralgleichungen und Summengleichungen. Erster Teil: Zur Theorie der Singularitäten *Volterra*scher Integralgleichungen	140.	120—158
*Volterra*sche Integralgleichungen und Summengleichungen. Zweiter Teil: Über die Lösungen gewisser Summengleichungen und ihr asymptotisches Verhalten	140.	159—174
A. Hurwitz in Zürich.		
Über die Kongruenz $ax^e + by^e + cz^e \equiv 0 \pmod{p}$	136.	272—292
E. Jacobsthal in Berlin.		
Über die Darstellung der Primzahlen der Form $4n+1$ als Summe zweier Quadrate	132.	238—245
Zur Theorie der Funktionale	140.	266—276
E. Jahnke in Berlin.		
Über orthogonale Substitutionen und die Differentialrelationen zwischen den Thetafunktionen von zwei Argumenten	133.	243—283
St. Jolles in Berlin-Halensee.		
Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz	134.	1— 14
H. W. E. Jung in Hamburg.		
Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x=a, y=b$	133.	289—314
Kurvenscharen in einer Ebene	134.	167—186
Über den kleinsten Kreis, der eine ebene Figur einschließt	137.	310—313
Zur Theorie der Kurvenscharen auf einer algebraischen Fläche	138.	77— 95
Über die *Cremona*sche Transformation der Ebene	138.	255—318
F. Klein in Göttingen.		
Berichtigung betr. die Auflösung der Ikosaedergleichung durch elliptische Modulfunktionen. (Zu der Arbeit in Bd. 129)	131.	86
J. Knoblauch in Berlin.		
Die Biegungs-Invarianten und Kovarianten von gegebener Ordnung	131.	247—264
K. Knopp in Berlin.		
Grenzwerte von *Dirichlet*schen Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze	138.	109—132

	Band	Seite
H. Kober in Breslau.		
Beiträge zur Behandlung spezieller Variationsprobleme; Untersuchung konjugierter kinetischer Brennpunkte	140.	235—246
P. Koebe in Leipzig.		
Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Erster Teil: Das allgemeine Uniformisierungsprinzip	138.	192—253
Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Zweiter Teil: Die zentralen Uniformisierungsprobleme	139.	251—292
D. König in Budapest.		
— und *A. Haar* in Göttingen, Über einfach geordnete Mengen . . .	139.	16— 28
L. Koenigsberger in Heidelberg.		
Über die Elimination von Variabeln zwischen den *Lagrange*schen Gleichungen der Dynamik	133.	179—242
P. Kokott in Neiße.		
Verallgemeinerung eines Satzes von *Gudermann* über sphärische, einander berührende Kreise	132.	81— 84
Elementar-geometrische Ableitung der Additionstheoreme der elliptischen Funktionen	140.	230—234
C. Kostka in Insterburg.		
Bemerkungen über symmetrische Funktionen	132.	159—166
Druckfehlerberichtigung hierzu	132.	246
G. Landsberg in Kiel.		
Bemerkungen zur Theorie der algebraischen Kurven	131.	152—164
Über Reduktion von Gleichungen durch Adjunktion	132.	1— 20
M. Lange in Hamburg.		
Die Verteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln in einem zu ihrer Zentrallinie symmetrischen elektrostatischen Felde . .	132.	69— 80
L. Lichtenstein in Berlin.		
Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken	140.	100—119
M. Mandl in Laibach.		
Über die Zerlegung von Funktionen mehrerer Variabeln in irreduktible Faktoren	131.	40— 48
A. Meder in Riga.		
Analytische Untersuchung singulärer Punkte von Raumkurven . . .	137.	83—144

	Band	Seite
F. Mertens in Wien.		
Über zyklische Gleichungen	131.	87—112
W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.		
Über kürzeste Abstände und einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff in der Theorie der Raumkurven und Flächen	139.	106—117
G. A. Miller in Urbana (Ill.)		
Note on the equation $s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2$, s_1 and s_2 being operators of a finite group	139.	80— 84
D. Mirimanoff in Genf.		
Sur le dernier théorème de *Fermat*	139.	309—324
Ch. Müntz in Lodz.		
Zum Randwertproblem der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen	139.	52— 79
C. Neumann in Leipzig.		
Über einige Reihen-Entwicklungen, die nach Produkten von Kugelfunktionen fortschreiten	135.	157—180
E. R. Neumann in Marburg a. d. L.		
Über eine neue Reduktionsmethode bei hydrodynamischen Problemen	132.	189—215
R. Neuendorff in Kiel.		
Zur Theorie der Kreispunktpolarkurven	137.	145—165
Über die Kurven auf einer Fläche, deren sphärische Bilder größte Kreise sind	140.	175—204
N. Nielsen in Kopenhagen.		
Sur les séries de fonctions cylindriques	132.	138—146
E. Noether in Erlangen.		
Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form	134.	23— 90
Zur Invariantentheorie der Formen von n Variabeln	139.	118—154
O. Perron in Tübingen.		
Neue Kriterien für die Irreduzibilität algebraischer Gleichungen . .	132.	288—307
Druckfehlerverzeichnis hierzu	133.	242
Zur Theorie der *Dirichlet*schen Reihen	134.	95—143
Berichtigung hierzu	136.	38
Über einen Satz des Herrn *Poincaré*	136.	17— 37
Über die *Poincaré*sche lineare Differenzengleichung	137.	6— 64

	Band	Seite
G. Pirondini in Rom.		
Sur la théorie générale des radiales et des anti-radiales	133.	77— 92
G. Rados in Budapest.		
Die Diskriminante der allgemeinen Kreisteilungsgleichung	131.	49— 55
R. Remak in Berlin.		
Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren	139.	293—308
G. Rémoundos in Athen.		
Sur quelques transformations des équations différentielles du premier ordre	134.	308—312
Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement . .	136.	58— 65
M. Réthy in Budapest.		
Über Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel	133.	284—288
Über Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel .	134.	299—307
M. Riesz in Stockholm.		
Über einen Satz des Herrn *Fatou*	140.	89— 99
W. Ritz. †		
Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik	135.	1— 61
R. Rothe in Clausthal i. H.		
Untersuchungen über die geodätische Abbildung zweier Flächen konstanten Krümmungsmaßes aufeinander	132.	36— 68
L. Saalschütz in Königsberg i. Pr.		
Zur Determinanten-Lehre	134.	187—197
Zusatz hierzu	136.	66
L. Schlesinger in Gießen.		
Zur Theorie der homogenen linearen Differentialsysteme	131.	202—215
Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen	132.	247—254
F. Schottky in Berlin.		
Vier Briefe *Cayleys*, nebst Vorbemerkung	139.	1— 6
Über eine *Cayley*sche Form und deren Anwendung auf das Problem des letzten Schnittpunkts zweier Kurven dritter Ordnung . . .	139.	7— 12
Über einen Satz, der sich auf die Anordnung der 4^p Thetafunktionen bezieht	139.	13— 15

	Band	Seite
L. v. Schrutka in Wien.		
Ein Beweis für die Zerlegbarkeit der Primzahlen von der Form $6n+1$ in ein einfaches und ein dreifaches Quadrat	140.	252—265
J. Schur in Berlin.		
Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen	132.	85—137
Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen	139.	155—250
Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen	140.	1— 28
K. Schwering in Köln.		
Anwendung der elliptischen Funktionen auf eine geometrische Aufgabe	131.	25— 39
F. Steinbacher in Friedrichshagen bei Berlin.		
*Abel*sche Körper als Kreisteilungskörper	139.	85—100
E. Steinitz in Breslau.		
Algebraische Theorie der Körper	137.	167—309
C. Stéphanos in Athen.		
Sur les forces donnant lieu à des trajectoires coniques	131.	136—151
R. Sturm in Breslau.		
Bemerkung zu *Cremona*s Abhandlung über die Flächen dritter Ordnung	134.	288—298
Berichtigung hierzu	135.	80
Zur *Jacobi*schen Erzeugung der Flächen 2. Grades	140.	33— 47
M. Stuyvaert in Gand.		
Congruences de triangles, cubiques gauches et autres variétés annulant des matrices	132.	216—237
J. Tamarkine in St. Petersburg.		
— und *A. Friedmann* in St. Petersburg, Quelques formules concernant la théorie de la fonction $[x]$ et les nombres de Bernoulli . . .	135.	146—156
F. Gomes Teixeira in Porto.		
Sur quelques applications des séries ordonnées suivant les puissances du sinus	131.	74— 85

	Band	Seite
L. W. Thomé. †		
Über simultane lineare Differentialgleichungen	131.	8— 24
Über eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen in der Variationsrechnung (Nachtrag zu den Abhandlungen des Verfassers in Bd. 125 u. Bd. 128 d. Journ.)	132.	147—158
Über simultane lineare Differentialgleichungen	133.	1— 17
Schlußbemerkung in betreff der vom Verfasser in diesem Journal veröffentlichten Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen	133.	18
Über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten (Zusatz zu den Abhandlungen des Verfassers in den Bänden 123 u. 126 d. Journ.)	134.	144
Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen	134.	145—155
Über simultane lineare Differentialgleichungen (Zusatz zu den Abhandlungen des Verfassers in den Bänden 131, 133 dieses Journals)	136.	306—314
Über eine Anwendung der Theorie der simultanen linearen Differentialgleichungen auf partielle Differentialgleichungen	138.	147—158
Über eine Anwendung der Theorie der simultanen linearen Differentialgleichungen auf Systeme linearer partieller und linearer totaler Differentialgleichungen	139.	29— 51
A. Thue in Christiania.		
Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen	135.	284—305
Ein Fundamentaltheorem zur Bestimmung von Annäherungswerten aller Wurzeln gewisser ganzer Funktionen	138.	96—108
G. Voronoï. †		
Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Premier Mémoire: Quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites	133.	97—178
Druckfehlerverzeichnis hierzu	133.	242
Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième Mémoire: Recherches sur les parallélo̊edres primitifs. Première partie	134.	198—287
Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième Mémoire: Recherches sur les parallélo̊edres primitifs. Seconde partie	136.	67—181
H. Weber in Straßburg.		
Über zyklische Zahlkörper	132.	167—188
Druckfehlerberichtigung hierzu	132.	246
R. Weitzenböck in Mödling bei Wien.		
Zum System eines linearen Komplexes und einer Fläche 2. Ordnung	137.	65— 82
A. Wieferich in Zoppot.		
Zum letzten *Fermat*schen Theorem	136.	293—302
Zur Dreiecksgeometrie	136.	303—305

	Band	Seite
Aufruf für ein Denkmal *Abels*	132.	308
Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft für das Jahr 1910	132.	309
Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft für das Jahr 1913	140.	298
Bekanntmachung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen über die *Wolfskehl*sche Preisstiftung (für den Beweis des großen *Fermat*schen Satzes)	134.	313—314
Ein neues Bildnis von *Dirichlet*	136.	66
Einladung zum V. Internationalen Mathematikerkongreß in Cambridge, 1912	140.	297

Namenverzeichnis zu Band 132	132.	310
Namenverzeichnis zu Band 133	133.	315

GENERAL LIBRARY,
UNIV. OF MICH.,
DEC 30 1911

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 140.

Heft 4.

Ausgegeben den 28. November.

Berlin W. 35

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1911.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 16 Mark.

Band 140. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Kober, H., Beiträge zur Behandlung spezieller Variationsprobleme; Untersuchung konjugierter kinetischer Brennpunkte . . . . . Seite 235

Gravé, D., Démonstration d'un théorème de *Tchébychef* généralisé . . . — 247

Schrutka, L. v., Ein Beweis für die Zerlegbarkeit der Primzahlen von der Form $6n+1$ in ein einfaches und ein dreifaches Quadrat . . . — 252

Jacobsthal, E., Zur Theorie der Funktionale . . . . . — 266

Dávid, L. v., Reihenentwicklungen und Konvergenzuntersuchungen betreffend die *Schapira*sche Iteration . . . . . — 277

Einladung zum V. Internationalen Mathematikerkongreß in Cambridge, 1912 — 297

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1913 — 298

Inhaltsverzeichnis der Bände 131—140 . . . . . — 299

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

GEORG REIMER
VERLAGSBUCHHANDLUNG

BERLIN W. 35
GENTHINER STRASSE 38

Die Hauptsätze der Elementar-Mathematik

von **Dr. F. G. MEHLER**

bearbeitet von **A. SCHULTE-TIGGES**
Direktor des Realgymnasiums zu Cassel

erscheinen in folgenden Ausgaben und Teilen:

Ausgabe A. Stammbuch, Vollausgabe.

26. Auflage. Gebunden 2.40 Mark

Ergänzungsheft, enthaltend diejenigen Teile des Stammbuchs Ausgabe A, welche stark verändert sind oder in den früheren Auflagen fehlen. Geheftet 40 Pfennig

Ausgabe B. Neue Ausgabe vollständig in 4 Bändchen.

Unterstufe. Gebunden 2 Mark

Oberstufe (in drei Bändchen)

I. Synthetische Geometrie der Kegelschnitte in engster Verbindung mit neuerer und darstellender Geometrie. Gebunden 1.50 Mark

II. Arithmetik, Trigonometrie, Stereometrie. Gebunden 1.50 Mark

III. Funktionale Geometrie (Graphische Darstellung von Funktionen, Analytische Geometrie der Ebene, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung). Gebunden 1.50 Mark

Zeitschrift für das Gymnasialwesen. 1908 Heft 2/3: Der Kampf um die Existenz in der Schulbücherliteratur zwingt auch altbewährte Bücher, den Forderungen der Zeit Rechnung zu tragen und sich Umänderungen anzubequemen, die größer sind als die von Auflage zu Auflage vorgenommenen Verbesserungen einzelner Stellen. Auch Mehlers Werk ist dem Schicksal nicht entgangen. Freilich, was hier vorliegt, ist eigentlich ein neues Buch; denn die Disziplinen der Schulmathematik, die es enthält, fehlten in dem „alten" Mehler bis auf den ersten Abschnitt ganz. Dieser, der die Lehren von harmonischen Punkten und Strahlen, Kreispolaren, Transversalen, Ähnlichkeitspunkten und die Apollonische Berührungsaufgabe enthält, ist ziemlich unverändert herübergekommen. Neu aber sind der zweite und dritte Abschnitt. Der zweite bringt die Grundzüge der darstellenden Geometrie. Der dritte Abschnitt bringt in vier Kapiteln die Grundzüge der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte, indem sie einmal als geometrische Orte, dann als Kegelschnitte, darauf als Zentralprojektionen des Kreises, endlich als Erzeugnisse projektiver Gebilde betrachtet werden. **Der Lehrgang, der damit geboten wird, ist nach den Erfahrungen des Berichterstatters sehr geeignet, die Schüler lebhaft für den Gegenstand zu erwärmen und ihre Aufmerksamkeit dauernd zu fesseln. Die Darstellung in ihrer Kürze, Klarheit und Folgerichtigkeit zeigt den Meister der Lehrkunst.** Ein besonders hervorzuhebender **Vorzug des Buches sind die Figuren, die in tadelloser Korrektheit,** meistens auf besonderen Tafeln, und in großer Zahl, teilweise in mehreren Farben, ihm beigegeben sind. Es mag **eine Freude sein, nach diesem Werkchen unterrichten zu können.**